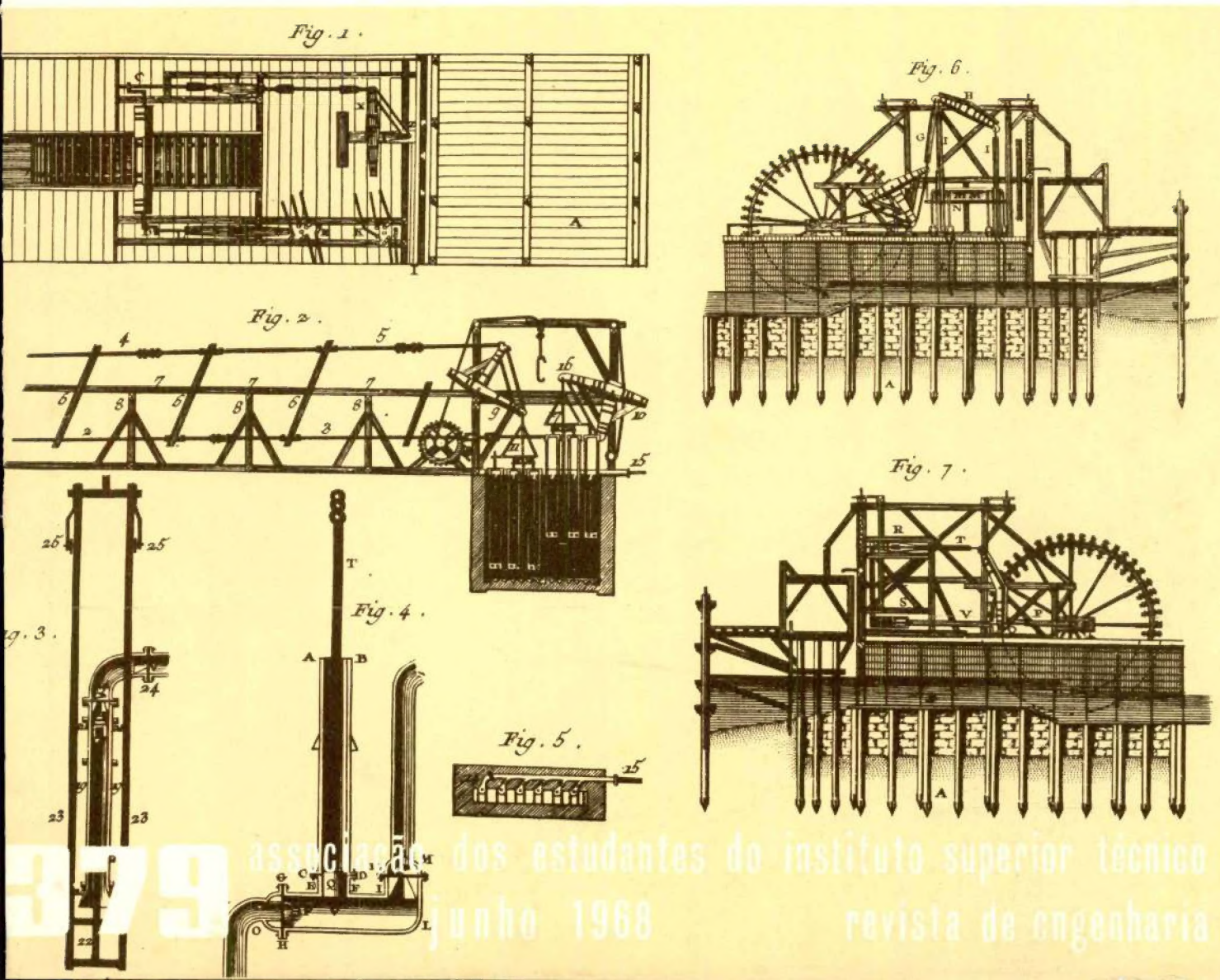
técnica



379 associação dos estudantes do instituto superior técnico
junho 1968 revista de engenharia

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE

TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE L.da
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

7.000 obras realizadas

coberturas
perfis especiais
vigas pré-esforçadas
pavimento trief
protecção de segurança

materiais novobra

pavimentos
em betão pré-esforçado
(homologados pelo Lab. Nac. de Engenharia Civil)

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100 - 5.º D.º - TEL. 774832 / 771603 - LISBOA 5

CIMENTO SECIL

SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

técnica

NUMERO 379 JUNHO DE 1968 ANO XLIII VOLUME XXX PUBLICAÇÃO MENSAL

Director
Vítor M. M. Pinto

Administrador
Vítor Coias e Silva

Redactores
Ana Maria Sobral
A. J. Tavares Pires
J. C. Alves da Silva
João M. Pereira

Editor e Proprietário
Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

Redacção e Administração
Avenida Rovisco Pais
Telefone 77 54 49
Lisboa 1

Assinaturas

		5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	—	70$00	130$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	80$00	140$00
Estrangeiro	—	90$00	150$00

Número avulso — 20$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

501 *JOÃO P. FIGANIER* — **Modos simples em guias de onda limitados por um meio qualquer.**
Simple modes in waveguides bounded by any material.

505 *A. R. J. BORGES* — **On the frequency response of floater-type anemographs.**
Sobre a resposta em frequência de anemógrafos tipo flutuador.

513 *J. VALENTE DA SILVA* — **Arcos de barragem em espiral logarítmica.**
Logarithmic spiral dam arches.

529 *NELSON MONTES* — **Economia e produtividade na Indústria da Construção. Alguns aspectos mais característicos.**
Economy and productivity in building industry. Some characteristic aspects.

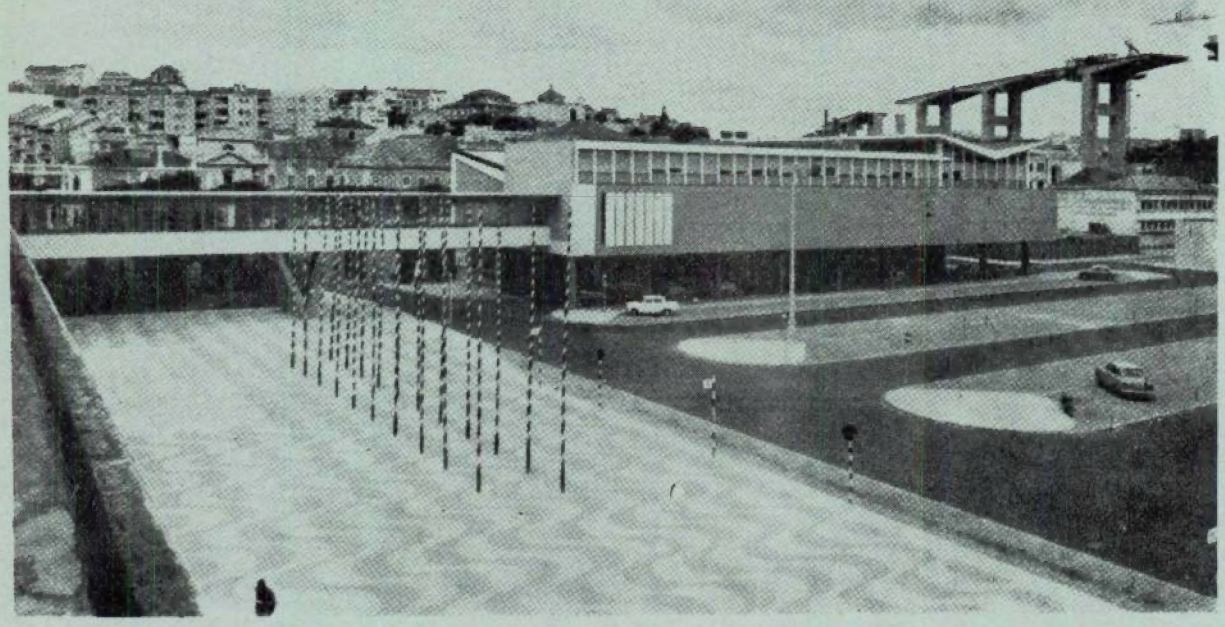
504 **Notas Informativas**
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

543 **Bibliografia**

CAPA: Máquina de Marly. Gravura de Bernard Direx de 1775.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXVIII
AEG	XIX
Aguiar e Melo, Lda.	XXVII
Araldite	XXX
Asea Eléctrica	V, VII, XXXI e XXXIII
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Cerâmica de Vale de Lobos, Lda.	XVIII
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Construções Técnicas	XV
Dial	XVIII
Electro-Arco, Ltd.ª	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXX
Empresa Electro Cerâmica	XXIX
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Guedal	XVIII
Guedes & Almeida, Lda.	VIII
Harker Sumner	XX
Heliaço	2.ª da capa
I. S. T.	XXV
Isoluz	XXII
J. J. Silva & Irmão	V
J. F. Azevedo e Silva	IV
J. Roma	VII
Jayme da Costa, Lda.	XVII
Johann Keller	V
LUSOTECNA	XIV
MAGUE	XIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Química Hoechst	XXIX
Rotring	XXVI
Siemens	XXI
Soc. Const. Amadeu Gaudêncio	XXV
Soc. Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Michaelis de Vasconcelos	XII
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
Somague	XXII
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	VII
Sopecate	II
Standard Eléctrica	IX
STET	XXIII
Tudor	VII
Wild Portugal, Lda.	III



PAVILHÃO DA FEIRA INTERNACIONAL DE LISBOA

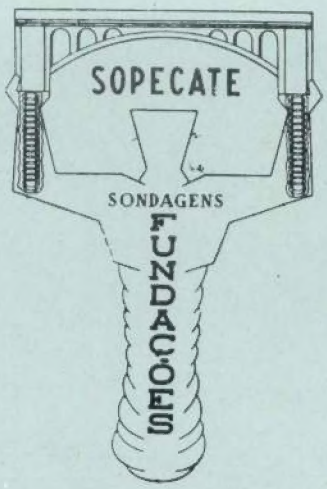
Assente sobre Estacas FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI L.DA

RUA BRAAMCAMP, 13-3.º — LISBOA 1 — TEL. P. P. C. 53 41 12/3/4 — ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI — LISBOA

PRÉDIO SANTOS GIL, 6.º ANDAR — SALA 10 — TEL. 9 11 67 — CAIXA POSTAL 1397

ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI—LOURENÇO MARQUES



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS

• REBAIXAMENTO DE NIVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1

TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS

PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS

LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

BUREAU VERITAS

GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA

Rua Silva Carvalho, 239

Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS

Venda Nova — Amadora

Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO

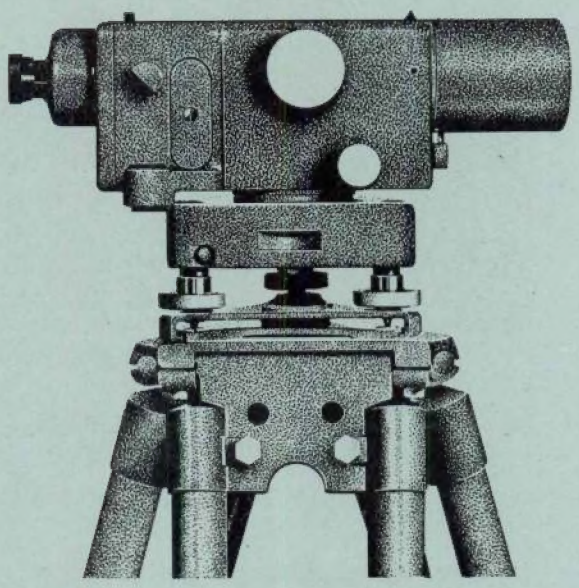
Rua do Bolhão, 216

Tel. 2 12 77 - 39 44 73

O novo Nível automático de engenheiro

WILD NAK 2

com círculo horizontal



WILD
HEERBRUGG

Para nivelamentos de média e grande precisão; com micrómetro de lâmina de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo: ± 1,5 mm

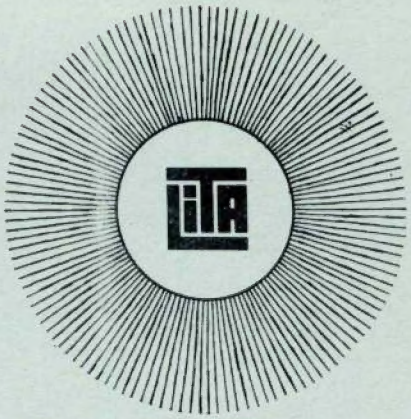
Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo com micrómetro: ± 0,4 mm

Luneta de 30 × de aumento com imagem direita de observação

Solicitem catálogo ou demonstração aos representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 91 12



para iluminação

decorativa ou industrial

iLTA

dispõe sempre da armadura adequada

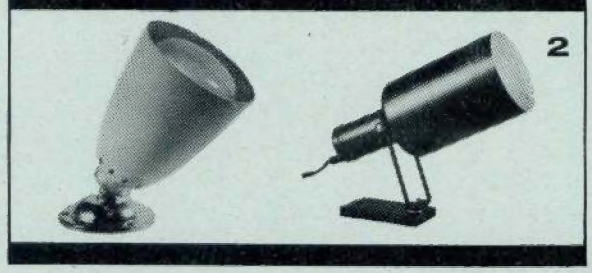
1 — Projectores exteriores e submergíveis completamente estanques.

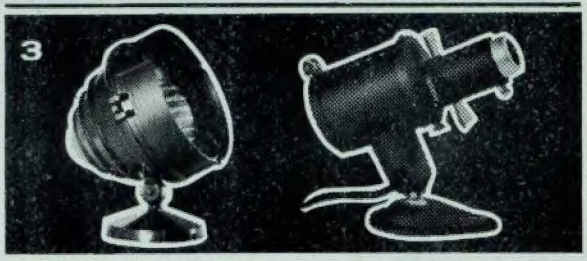
2 — Projectores com suportes móveis e fixos para lâmpadas espelhadas até 150 W.

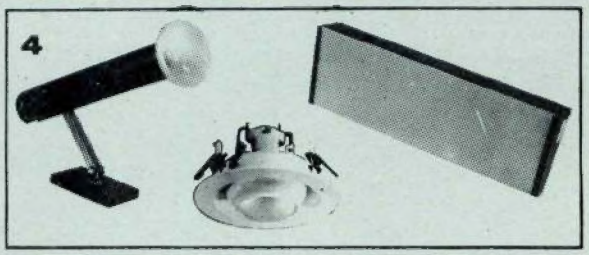
3 — Projectores para fins especiais — iluminação de quadros, monumentos, fachadas de edifícios, etc.

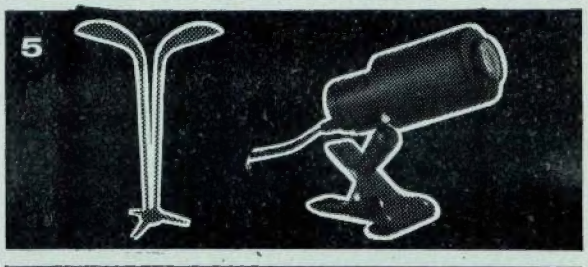
4 — Armaduras decorativas para interiores — pendentes, de encastrar, apliques, etc.

5 — Pequenos projectores para ler na cama, e ainda armaduras especiais para iluminação de jardins.





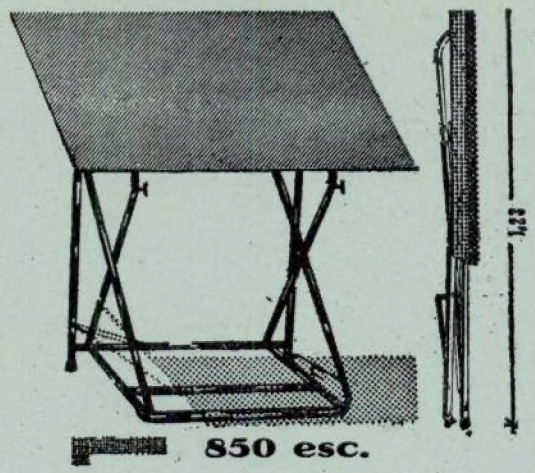




JF

J.F. DE AZEVEDO E SILVA & C.ª L.DA

Rua S. Francisco de Sales, 2 1.º andar, Tel. 654165 — Lisboa



850 esc.

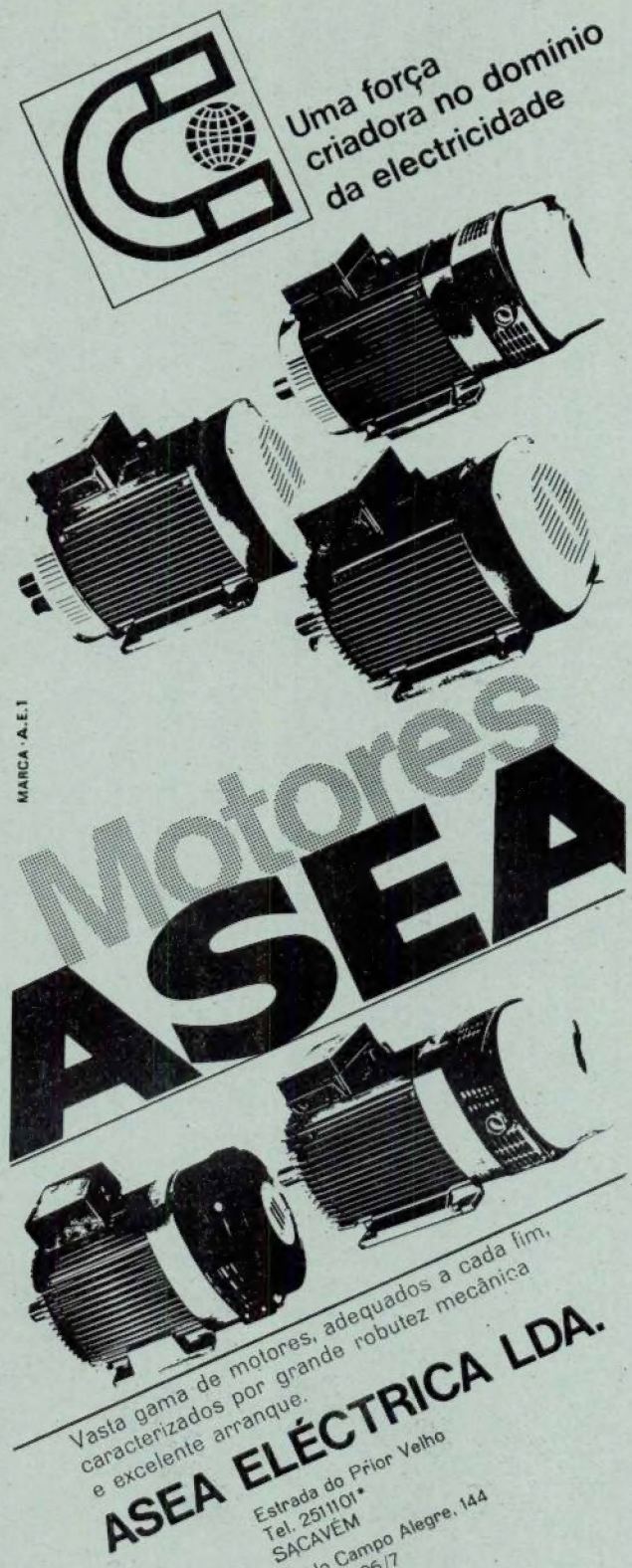
CARACTERÍSTICAS: Tubo de aço, articulado em qualquer posição, várias inclinações, fàcilmente transportável, não ocupa espaço quando fechado, pranchela de 1,20 × 0,80 de madeira, em tela. Pintura de estufa.

Em exposição, outros modelos de madeira e metálicos e todo o material de consumo e equipamento de desenho, escritório e papelaria

Distribuidores exclusivos, em Lisboa, do estirador da ***Fábrica Otaio***

J. J. SILVA & IRMÃO, LDA.

rua silva carvalho 232-b · lisboa · telefone 652750 / 680671



O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

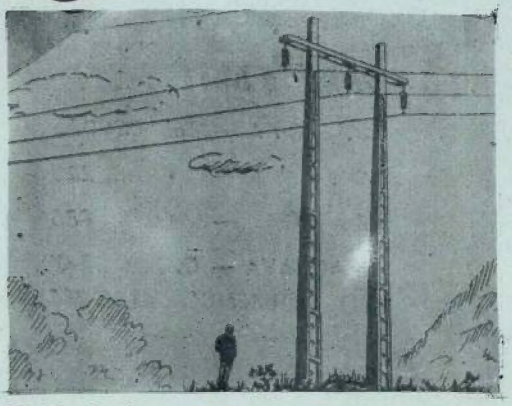
CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

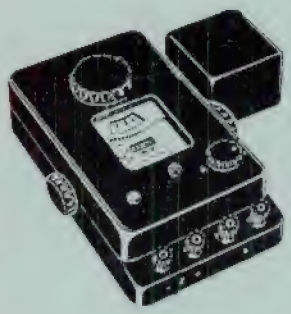
SOCIEDADE PORTUGUESA **Carvam**



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 -TELEF. 47812-50129

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO



Aparelhagem de medidas eléctricas

- indicadora
- reguladora
- registadora

J. ROMA, L.DA

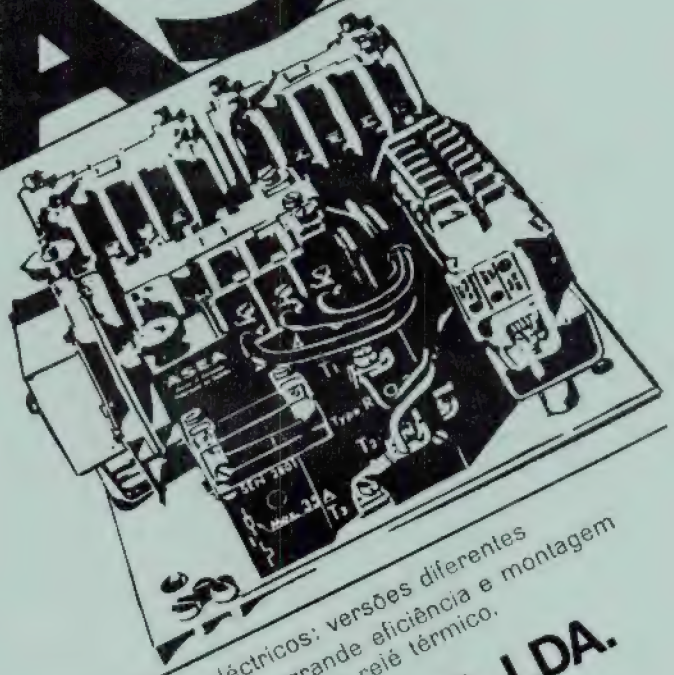
P. da Figueira, 12, 1.º LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S 3 PORTO Tel. 0236732

MARCA · A.E.2

Uma força criadora no domínio da electricidade

Arrancadores ASEA

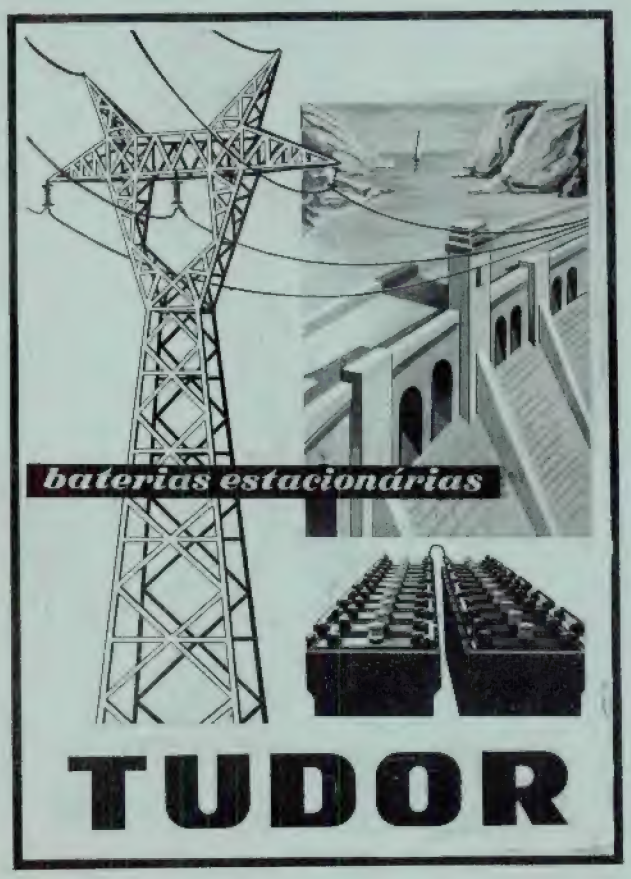


Para motores eléctricos: versões diferentes de arrancadores de grande eficiência e montagem fácil, com temporizador e relé térmico.

ASEA ELÉCTRICA LDA.

Estrada do Prior Velho
Tel. 2511101*
SACAVÉM

R. do Campo Alegre, 144
Tel. 62106/7
PORTO



WABCO

WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY

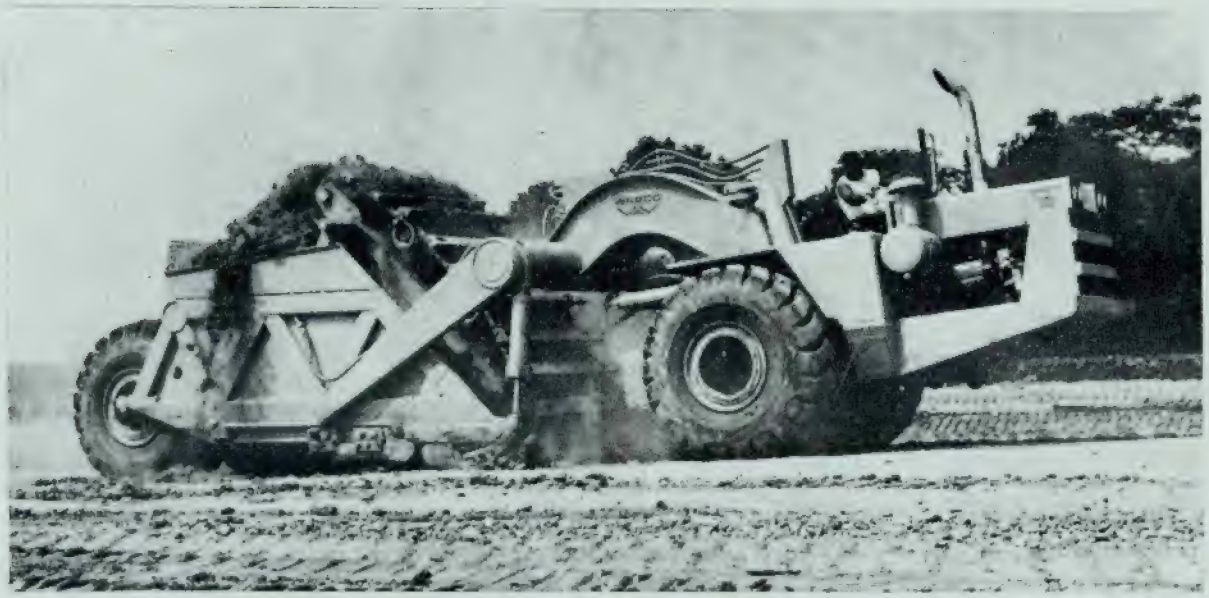
Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) USA

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!

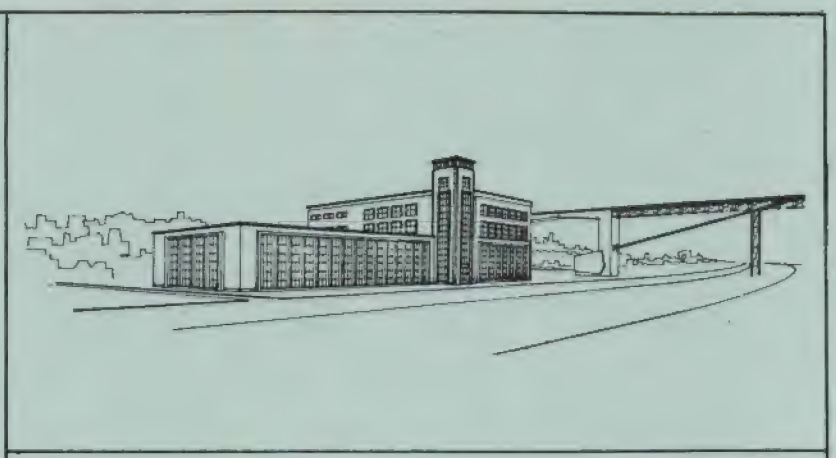


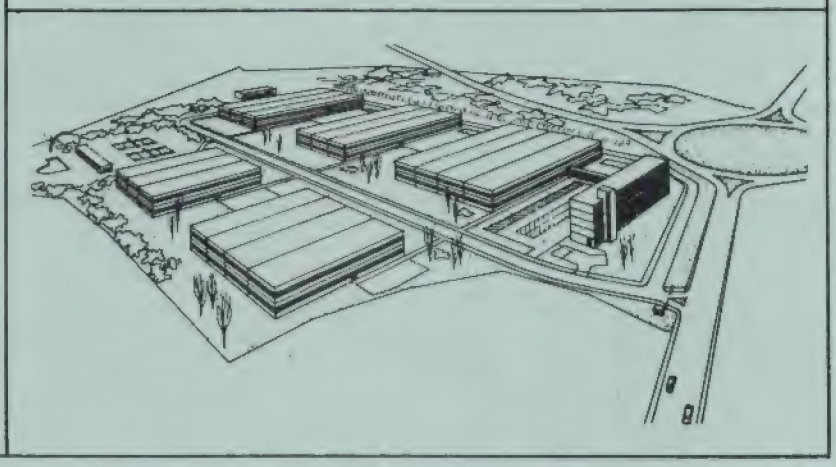
DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

Através das suas organizações de: LISBOA • LUANDA LOBITO • NOVA LISBOA e Agências de: PORTO, GUINÉ, S. TOMÉ E PRÍNCIPE e CABO VERDE fornecerá todos os elementos técnicos, para criteriosa escolha, assistência técnica e sobresselentes.
A1-a





O CRESCIMENTO COMO FACTOR DE DESENVOLVIMENTO

Tal como as árvores, quando bem cuidadas, criam raízes, crescem, ramificam-se e dão bons frutos, assim as empresas, quando bem dirigidas, definem uma posição, desenvolvem-se, diversificam as suas actividades e lançam nos mercados produtos de alta qualidade.

A Standard Eléctrica, pioneira da indústria das Telecomunicações e Electrónica em Portugal, que em 1932 não dispunha de mais de uma escassa dezena de empregados, conta hoje com mais de 2200 pessoas nas suas fábricas de Lisboa, Cascais e Luanda. O ritmo de crescimento e expansão tem sido de tal modo elevado que o volume de vendas passou de 30 000 contos em 1957 para 300 000 em 1967, prevendo-se que em 1970 a produção total da Standard Eléctrica atinja o valor de 1 500 000 contos, dos quais 1 000 000 se destinam à exportação.

A Standard Eléctrica é, pois, um valor positivo na indústria nacional, que tem como base o elevado nível técnico e profissional e ainda o magnífico esforço de todos os que nela trabalham.

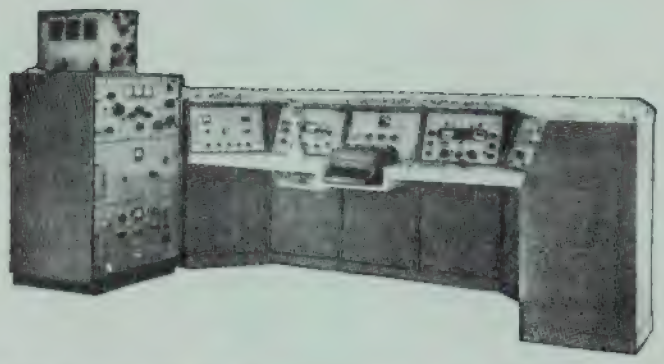
Standard Eléctrica **ITT**

PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

Também próprio para:
impermeabilizar terrenos,
paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TELEF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

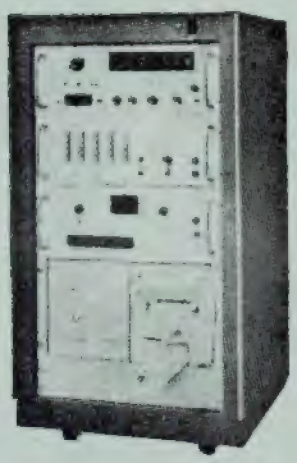
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

aparelhagem electrónica de medida e registo

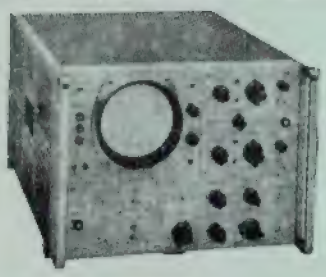
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn

Osciloscópio HP



Contador Electrónico HP

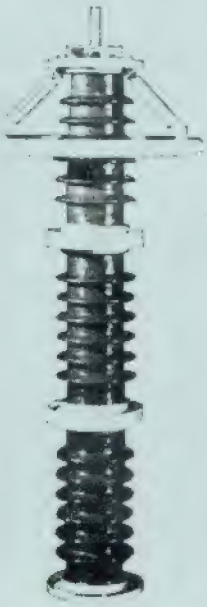
TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

Os pára-raios Oerlikon...

... estão na vanguarda do progresso e protegem instalações em todo o mundo

Corrente de descarga 5 kA

RV
380 & 500 V



Descarga de longas linhas em vazio, protecção de postos completos, transformadores, alternadores ou consumidores ligados a linhas aéreas. Para cada função, o pára-raios apropriado.

OERLIKON

VG/WG
6 – 37 kV

Corrente de descarga 5 e 10 kA respectivamente Ondas rectangulares 75A 1000 µs e 150A 2000 µs

WGE
40 – 73 kV

Corrente de descarga 10 kA Ondas rectangulares 150A 2000 µs Membrana anti-explosão

WM/WMR
50 – 500 kV

Insuflação magnética Corrente de descarga 10 kA, Ondas rectangulares 1000A 2000 µs Membrana anti-explosão

Para indicações mais amplas consultar os nossos representantes Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Ltda. Porto e Lisboa

Ateliers de Construction Oerlikon · Zurich (Suiça)

Representantes para Portugal e Ultramar: Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda., Porto e Lisboa

técnica

NUMERO 379 JUNHO DE 1968 ANO XLIII VOL. XXX PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 621.372.812

MODOS SIMPLES EM GUIAS DE ONDA LIMITADOS POR UM MEIO QUALQUER

por JOÃO P. FIGANIER
Assistente do I.S.T.
Assist. C.E.E. da C.E.E.N. (I.A.C.)

RESUMO

Mostra-se que em guias de onda limitados por um meio qualquer, a condição para que sejam possíveis modos simples, derivados duma única componente longitudinal, é que seja nula a derivada tangencial dessa componente sobre a parede, de ambos os lados dela.

SYNOPSIS

It is shown that in order to have simple modes derived from a single longitudinal component in a waveguide bounded by any material, the tangencial derivative of this component must be null over the boundary, on both sides of it.

1 — Ao estudar-se a propagação de ondas electromagnéticas em guias de onda limitados ùnicamente por condutores perfeitos verifica-se que as soluções mais simples — modos — são construídas a partir duma única componente longitudinal dos campos, caracterizando-se ainda pela ausência da outra componente longitudinal. Já quando se consideram guias limitados por outros tipos de paredes chega-se normalmente à conclusão que as soluções elementares assim construídas não satisfazem às novas condições nas fronteiras, tornando-se então necessário sobrepor convenientemente duas daquelas soluções, uma derivada da componente longitudinal do campo eléctrico e a outra da do campo magnético — obtêm-se assim os chamados «modos híbridos». No entanto nem sempre assim é, e este facto justifica que se procure averiguar para guias de onda aos quais não se imponham condições muito restritivas em que circunstâncias são possíveis modos simples (construídos a partir duma única componente longitudinal, mantendo a outra componente nula) ou, pelo contrário, se tem que recorrer aos modos híbridos para poder satisfazer às condições nas fronteiras.

2 — Chama-se aqui guia de onda a uma estrutura tal que as paredes (fronteiras) são superfícies de geratriz paralela a uma dada direcção — eixo dos z — mas de secção transversal qualquer e pondo em presença meios homogéneos, isótropos e lineares, mas sem qualquer outra restrição. As soluções que se vão considerar têm variação exponencial no tempo (com frequência angular ω imposta) e segundo z (com número de onda h dependente da geometria das fronteiras); as componentes dos campos serão portanto da forma

$$f_T \,.\, \exp\,[j\omega t]\, \exp\,[-jhz]\ ,$$

em que f_T é uma função só das coordenadas transversais.

Os campos eléctrico e magnético são separados nas componentes transversal e longitudinal

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_T} + E_z\,\mathbf{a_z}$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H_T} + H_z\,\mathbf{a_z}\,.$$

Pondo

$$\nabla_T = \nabla - \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{a_z}$$

$$\nabla_T^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 - h^2\,,$$

uma manipulação relativamente simples permite obter a partir das equações de Maxwell os seguintes resultados para cada um dos meios em presença (k: número de onda para a propagação da onda plana no meio em causa; Z_0 impedância característica do meio), [1]:

$$\left|\begin{aligned} \mathbf{E_T} &= \frac{jh}{h^2-k^2}\nabla_T E_z - \frac{jk}{h^2-k^2} Z_0\,\mathbf{a_z} \times \nabla_T H_z \\ \mathbf{H_T} &= \frac{jh}{h^2-k^2}\nabla_T H_z + \frac{jk}{h^2-k^2}\frac{1}{Z_0}\,\mathbf{a_z} \times \nabla_T E_z \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

e

$$\nabla_T^2 E_z + (k^2-h^2)\,E_z = 0 \qquad (2\,a)$$

$$\nabla_T^2 H_z + (k^2-h^2)\,H_z = 0 \qquad (2\,b)$$

A separação em modos simples faz-se agora pondo em toda a secção transversal $H_z = 0$ (modos E ou TM) ou $E_z = 0$ (modos H ou TE) a expressão dos campos transversais para estes modos deriva-se imediatamente de (1).

3 — A determinação dos modos centra-se na obtenção de soluções das equações de continuidade das componentes tangenciais dos campos sobre as fronteiras do guia, ou seja ($\mathbf{n}$: vector unitário normal à parede do guia)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E_1} - \mathbf{E_2}) = 0 \qquad (3\,a)$$
$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H_1} - \mathbf{H_2}) = 0 \qquad (3\,b)$$

no caso geral e

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \qquad (3\,c)$$

quando as paredes são constituídas por condutores perfeitos, [2].

Estas condições vão ser escritas para o caso presente em cada ponto da parede, tomando como coordenadas a normal (n) e a tangente no plano transversal (τ); vem assim para os modos E, sobre toda a parede,

$$E_{z1} - E_{z2} = 0 \qquad (4\,a)$$

$$\frac{1}{h^2-k_1^2}\frac{\partial E_{z1}}{\partial \tau} - \frac{1}{h^2-k_2^2}\frac{\partial E_{z2}}{\partial \tau} = 0 \qquad (4\,b)$$

$$\frac{k_1}{h^2-k_1^2}\frac{1}{Z_{01}}\frac{\partial E_{z1}}{\partial \tau}\;\frac{k_2}{h^2-k_2^2}\frac{1}{Z_{02}}\frac{\partial E_{z2}}{\partial \tau} = 0\;; \qquad (4\,c)$$

para os modos H ter-se-ia uma escrita perfeitamente análoga.

4 — A observação das condições (4) mostra que as duas condições (4 a) e (4 b) não podem em geral ser simultâneamente satisfeitas. Efectivamente pode-se dar a (4 b) o seguinte aspecto

$$\frac{1}{h^2-k_1^2}\frac{\partial}{\partial \tau}(E_{z1} - E_{z2}) = \left[\frac{1}{h^2-k_2^2} - \frac{1}{h^2-k_1^2}\right]\frac{\partial E_{z2}}{\partial \tau}\,.$$

A condição (4 a), válida em todos os pontos da parede, implica o anulamento do membro da esquerda desta igualdade; mas o membro da direita só poderá ser nulo se $\frac{\partial E_{z2}}{\partial \tau} = 0$ sobre toda a fronteira (admite-se que os meios em presença são contrastados, isto é, $k_1 \neq k_2$). Da mesma maneira, deve ser também $\frac{\partial E_{z1}}{\partial \tau} = 0$.

Para os modos H se concluiria por um processo perfeitamente semelhante que as duas condições em que se desdobra (3b) também serão incompatíveis a não ser que $\frac{\partial H_z}{\partial \tau} = 0$ dos dois lados da fronteira.

Em conclusão: para os modos simples — construídos como para os guias em que todas as paredes são condutores perfeitos a partir duma única componente longitudinal, mantendo nula a outra componente longitudinal — as condições nas fronteiras (4) introduzem um sobre-condi-

cionamento a não ser que dos dois lados da fronteira e sobre toda ela se tenha

$$\frac{\partial A_z}{\partial \tau} = 0 \qquad (5)$$

em que A_z representa E_z ou H_z conforme o tipo de modo considerado (E ou H).

A maneira de sair deste impasse consiste em sobrepor um modo E e um modo H, formando assim um modo híbrido. Agora as condições nas fronteiras são calculadas a partir de (1) e é fácil de verificar que desaparece a dificuldade encontrada acima.

5 — O caso dos modos totalmente transversais (*TEM*) deve ser referido dada a importância destes modos no estudo das linhas de transmissão usuais. Pode-se mostrar, atendendo a (1), que para estes modos, em que ambas as componentes longitudinais são nulas por toda a parte, se é obrigado a pôr

$$h = k$$

para evitar soluções triviais. Mas a continuidade de algumas das componentes dos campos através das fronteiras não permite satisfazer a esta igualdade (com meios contrastados) a não ser que os campos num dos dois meios em presença sejam idênticamente nulos, o que só se verifica se esse meio for um condutor perfeito.

6 — Pode-se então resumir as condições a que se chegou nos parágrafos anteriores: nos guias de onda limitados por paredes de natureza qualquer os modos de propagação mais simples são híbridos; pode no entanto haver modos construídos a partir duma única componente longitudinal, com a outra componente longitudinal nula, se a derivada tangencial daquela componente for nula em todo o contorno da fronteira no plano transversal (equação (5)). No caso dos guias totalmente limitados por condutores perfeitos os modos simples tornam-se sempre possíveis — são os modos próprios correspondentes —, e são estes guias os únicos a poderem eventualmente suportar um modo totalmente transversal — quando a sua secção transversal for mùltiplamente conexa — [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] — J. Figanier, «Princípios fundamentais da técnica das micro-ondas — Propagação em guias de ondas», Técnica, (Novembro de 1957).

[2] — J. Stratton, «Electromagnetic theory» McGraw-Hill, (1941).

C D. U. 621.311.5/91

ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

I — Breve nota mensal

No conjunto do sistema, as afluências totalizaram cerca de 836 GWh, correspondendo-lhes uma probabilidade de serem excedidas de 36 % e um coeficiente de produtibilidade de 1,18.

O regime de afluências ao conjunto do sistema durante o primeiro semestre do ano hidrológico tem uma probabilidade de ser excedido da ordem dos 79 % e um coeficiente de produtibilidade hidroeléctrica de 0,77 sendo, portanto, sensìvelmente mais favorável que o do período Novembro-Março (coeficiente de produtibilidade de 0,68; probabilidade de 82 %.

O armazenamento das albufeiras registou uma apreciável subida (217 GWh), concentrada, principalmente na 2.ª quinzena do mês.

II — Elementos gerais (GWh)

	a) Mensais 1967	a) Mensais 1968	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	438,9	500,5	+ 14
Produção térmica (P_t)	0,0	4,5	+ –
Produção total (P_T)	438,9	505,0	+ 15
Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC (E_r)	2,1	4,2	100
Exportações (Ex)	0,0	0,0	0
Importações (I)	0,0	0,0	0
Saldo importador (S_I)	0,0	0,0	0
Cons. em bomb. hidroelé. (C_b) (1)	0,0	14,0	— –
Produção para consumos perman. (Pc_p) (2)	367,8	415,6	+ 13,0 (1)
Produção para consumos não perman. (Pc_{np}) (2)	73,2	79,6	+ 9
Total	441,0	559,2	+ 15
Coeficiente de hidraulicidade	0,63	1,18	—

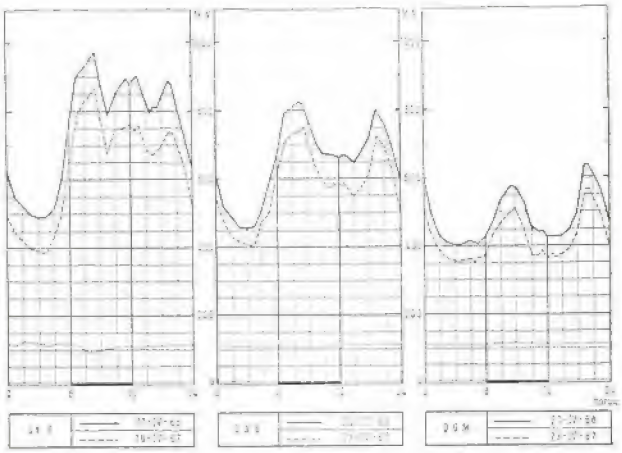
NOTA:

(1) O aumento percentual da produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais é respectivamente de 13,3 e 12,1 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1967	4.ª feira: 1968
Produção hidraulica		(P_h) MWh	15 577	18 839
Produção térmica		(P_t) MWh	0	0
Produção total		(P_T) MWh	15 577	18 839
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	0	0
	Import.	(I) MWh	0	0
Consum em bomb. hidroel.		(C_b) MWh	0	490
Prod. para cons. perm.		(P_{cp}) MWh	13 056	15 647
Prod. para cons. não perm.		(P_{cnp}) MWh	2 521	2 702
TOTAL		$P_T + (I - Ex)$ MWh	15 577	18 349
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência máx. MW	865	976
		Potência mín. MW	384	488
		Utiliz. da ponta horas	18,0	18,8
		Factor de carga	0,75	0,78
	P_{cp}	Potência máx. MW	756	878
		Potência mín. MW	300	373
		Utiliz. da ponta horas	17,3	17,8
		Factor de carga	0,72	0,74

ABRIL



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês GWh	No fim do mês % (1)
Alto Rabagão	407,9	41,9
Paradela	114,3	51,4
Venda Nova	112,4	87,8
Salamonde	2,4	8,7
Caniçada	25,2	76,1
Vilar	51,0	50,7
Cabril	232,9	68,6
Castelo do Bode	114,5	70,2
Guilhofrei	7,4	89,2
Lagoa Comprida	27,5 (2)	68,9
Santa Luzia	46,7	75,8
Pracana	11,9	92,2
Póvoa	8,6 (3)	68,3
Total { com A. Rabagão . . .	1 162,7	54,8
Total { sem A. Rabagão . . .	754,8	65,7

NOTAS

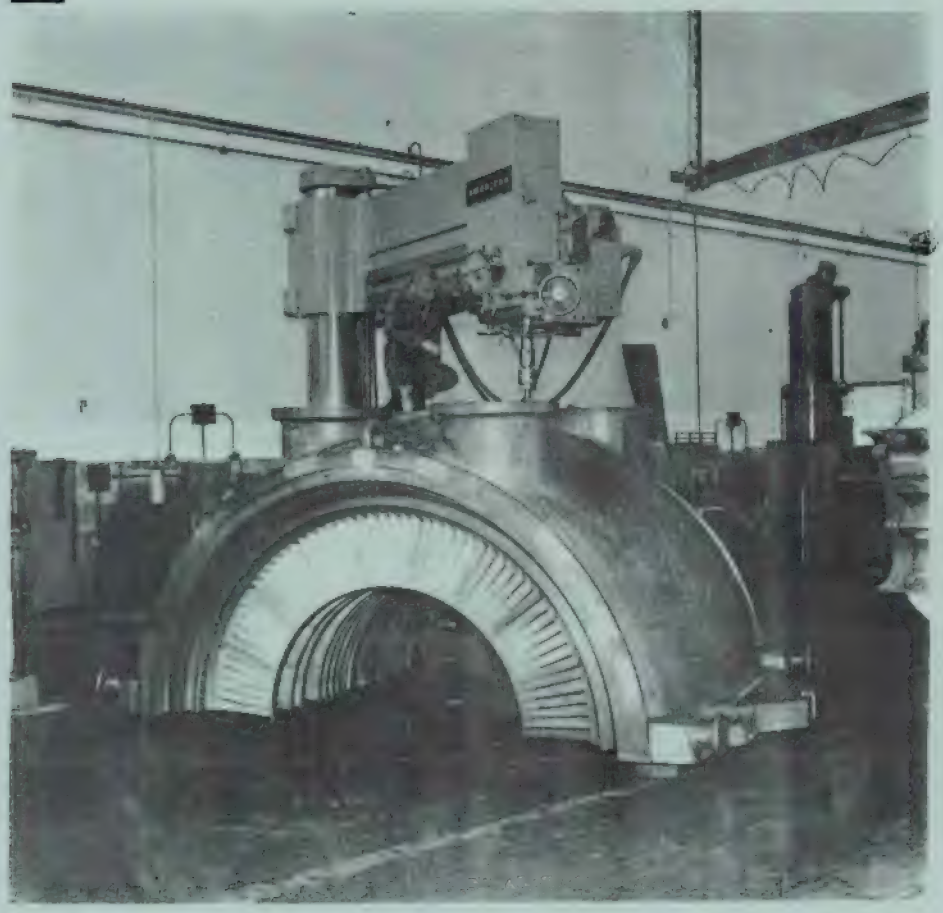
(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 3,4 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 3,4 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 1,5 GWh armazenados no açude do Polo no início do mês e 1,8 GWh no fim do mês.

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

MAGUE



ASPECTO DA FURAÇÃO FINAL DE UMA DAS METADES DO PORTA-ALHETAS DO CORPO DE BAIXA PRESSÃO DO TURBO-GRUPO I DA CENTRAL TÉRMICA DO CARREGADO.

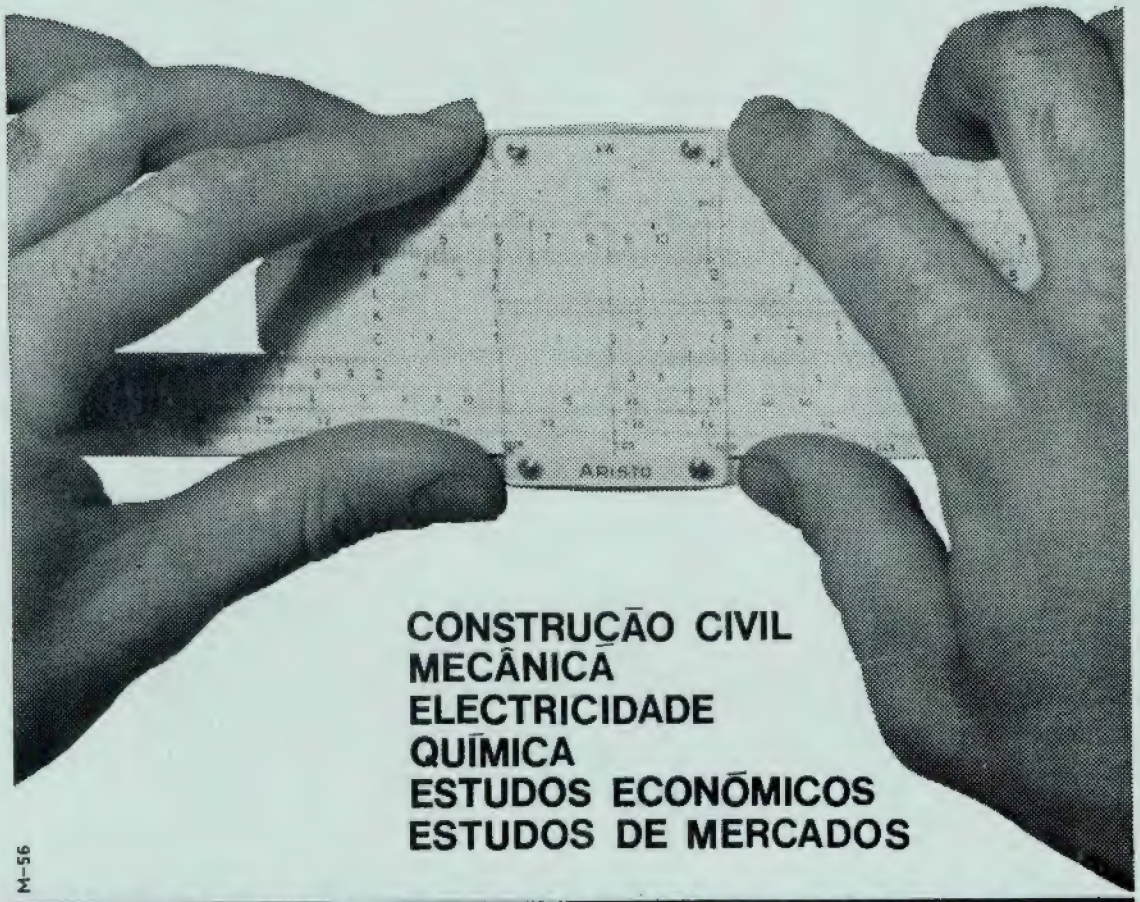
(Licença Brown Boveri & Cie)

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

PROJECTOS COMPLETOS DE INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS



CONSTRUÇÃO CIVIL
MECÂNICA
ELECTRICIDADE
QUÍMICA
ESTUDOS ECONÓMICOS
ESTUDOS DE MERCADOS

M-56

LUSOTECNA

CONSULTORES TÉCNICOS INDUSTRIAIS, S A R L

R. PADRE A. VIEIRA, 26 - LISBOA - TEL. 688082/3

A MAIOR ORGANIZAÇÃO DO PAÍS QUE SE DEDICA EXCLUSIVAMENTE A ESTUDOS E PROJECTOS

C. D. U. 551.508.5

ON THE FREQUENCY RESPONSE OF FLOATER-TYPE ANEMOGRAPHS

(VELOCITY FLUCTUATIONS IN THE DIRECTION OF MEAN SPEED)

By A. R. J. BORGES (*)

RESUMO

Resumem-se os fundamentos teóricos de dois métodos experimentais de determinação das curvas caracteristicas de resposta em frequência de anemógrafos.

Aplicam-se os métodos expostos na determinação das curvas de resposta em frequência do anemógrafo universal Fuess 82a. Comparam-se e discutem-se os resultados obtidos.

SYNOPSIS

The first part of the paper contains a survey of the theoretic foundations of two quite general experimental methods for determining the frequency response characteristics of anemographs.

In the latter part of the paper the two methods are applied to the Fuess 82a universal anemograph. The experimental results are compared and discussed.

1 — INTRODUCTION

The measurement of the velocity in a flow at given points and times is a delicate problem whose solution is more or less dificult according to the nature of the flow and the purpose for which the results are intended. These are the reasons why there are such diverse measurement techniques and why one must be acquainted with the phenomenon beforehand, even if only summarily. These preliminary data will enable one to choose the most suitable technique and also to confirm, at least in part, the values obtained. Let us now take a look, in very general terms, into how the measuring technique to be be used depends on the nature of the flow and on its interaction with the boundaries.

The need to refer the measured velocities to a sufficiently small region of space influences the size of the probe to be used; the non-uniformity in the flow and the finite dimensions of the probe will endow the measured values with an average character within a region which includes the neighbourhood of the probe.

The fact that the probe generally behaves as a foreign body plunged in the flow causes the bondaries of the latter to be altered and this results in an interaction which makes the measurement possible but, at the same time, limits the shape, dimensions and location of the probe. Because of the unsteadiness of the flow a suitable frequency response will be required from the measuring instrument; the faster the velocity fluctuations, the faster the response of the instrument should be, this resulting generally in a more delicate measuring technique.

The present paper deals with the study of this problem, inasmuch as natural wind is concerned, and has in view the introduction of measurement techniques for measuring the frequency response chararacteristics of anemographs.

From a theoretical point of view wind velocity records should present no distortion. This means that the anemograph should provide a frequency response with a constant gain and a negative phase difference which ought to be proportional to the frequency [4]. From a practical point of view, as natural wind contains almost all its kinetic energy within the band of 0-5 c/s [1,2], a good anemograph should comply, within a reasonable approximation, with the said theoretical conditions in the said frequency band.

We will report on the frequency response of the Fuess 82a universal anemograph and on the theoretic fundamentals underlying the calculations and relating the two different techniques used.

(*) Research Officer, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon-5 — Portugal.

This work was carried out in the Buildings and Bridges Department of the «Laboratório Nacional de Engenharia Civil» and this paper sums up a LNEC internal report [6] where more details about the experimental techniques used can be found.

2 — THEORETIC FUNDAMENTALS

2.0 — An adequate solution of a dynamic problem implies a previous acquaintance with its nature and it often becomes necessary to carry out certain preliminary tests in order that one should be able to judge, for instance, on the linearity or non-linearity of the system.

If the sistem is linear its fundamental characteristic is the transfer function that can be obtained by analytical means if the equation of motion is known or by experimental means with the help of methods described further. If, on the contrary, the system is non-linear then a single unique transfer function cannot be defined and the exact analytic solution of the problem becomes in general extremely complicated, if not impossible.

In the present case, the Fuess anemograph behaves as a non-linear system. In view of the great complexity of the Fuess system we decided, from the start, in favour of an experimental study and chose the method that consists in studying the small oscillations of the system around various points of static equilibrium adequately distributed along the measuring range of the apparatus. In this way the non-linear system can be substituted by a series of ideal linear systems for each of which a transfer function can be defined.

Obviously, if this method is applied to the study of a linear system, the transfer functions obtained from the various points studied will be equal. If not, the diversity of transfer functions will give an ideia of the extent of the non-linearity of the system and will enable one to estimate, if need be, the evolution of its parameters.

2.1 — Steady-state method

Let us consider a linear system and assume that a steady-state is established. A sinusoidal input signal x having an angular frequency ω and an amplitude X is transformed into the output signal y, which is also sinusoidal and has the same frequency, a magnitude Y and a phase difference φ, i.e.

$$y = A\, e^{j\varphi} x\,, \tag{1}$$

where A is the ratio of output and input amplitudes.

In most cases the signals are not purely sinusoidal, so that expression (1) has to be applied to each of its harmonics and then, for the nth harmonic, we have similary

$$y_n = \Phi\,(j\,\omega_n)\; x_n \tag{2}$$

where

$$\Phi\,(j\,\omega_n) = A\,(\omega_n)\; e^{\,j\,\varphi(\omega_n)} \tag{3}$$

The complex function $\Phi\,(j\,\omega)$, which is obtained by generalisation of $\Phi\,(j\,\omega_n)$ when ω_n varies continually between 0 and ∞, is the transfer function of the system. The real functions $A\,(\omega)$ and $\varphi\,(\omega)$, the characteristic of amplitude and the characteristic of phase of the system, are obtained likewise. It is worthwile noting that the transfer function, or the last two characteristic functions, entirely define the corresponding dynamic system.

2.2 — Impulsive response method

According to expression (3), a transfer function represents the behaviour of the system in the frequency range. However, in certain cases, it is preferable to choose time rather than frequency, which leads to a real function of time to be called the impulsive response of the system, represented by k (t). The correspondence between k (t) and $\Phi\,(j\omega)$ is the Fourier transform pair [5]

$$k\,(t) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\,(j\omega)\; e^{\,j\omega t}\, d\omega \tag{4}$$

$$t > 0$$

$$\Phi\,(j\omega) = \int_{0}^{\infty} k\,(t)\; e^{-j\omega t}\, dt \tag{5}$$

and the transient state x (t), due to the signal f (t), is given as

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)\, F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (6)$$

where

$$F(j\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\,, \qquad (7)$$

since $f(t) = 0$ for $t < 0$. A comparison of (6) with (4) shows that k(t) is the response of the system to a signal f(t) whose Fourier transform $F(j\omega)$ is equal to the unit. Quite generally, the function f(t) which has that property is called unit-impulse function and this explains why we have referred to k(t) as impulsive response.

Unfolding $\Phi(j\omega)$ into its real and imaginary parts we have

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) - j\, Q(\omega)$$

and, given the relation (5), we may write the expressions

$$P(\omega) = \int_{0}^{\infty} k(t) \cos \omega t\, dt$$

$$Q(\omega) = \int_{0}^{\infty} k(t) \sin \omega t\, dt \qquad (8)$$

which make it possible to obtain the transfer function from the impulsive response by calculating the right-side integrals.

In this paper we will make use of expressions (8), the integrals being caculated according to an approximate grapho-numerical method presented in [5]. This method consists basically in substituting the continuous curve representing k (t) by a number of straight-line segments and applying the trapezoidal rule as shown in fig. 1 which applies to the case of an oscillating impulsive response; an entirely similar procedure applies in the case of a non-oscillating response.

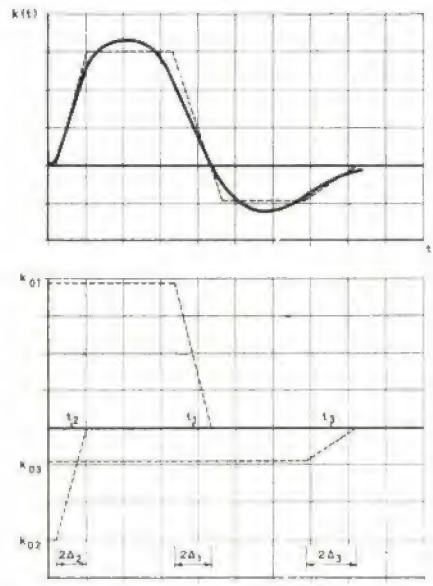


Fig. 1 — Graphical approximation to the impulsive response

From the above it results that expressions (8) can be written in the aproximate form

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} k_i(t) \cos \omega t\, dt$$

$$Q(\omega) = -\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{\infty} k_i(t) \sin \omega t\, dt, \qquad (9)$$

n being a (sufficiently large) number of trapezoids. These expressions show that the transfer function can be obtained by calculating 2n integrals of the form

$$\begin{matrix} p_i(\omega) \\ q_i(\omega) \end{matrix} = \int_{0}^{\infty} k_i(t) \begin{matrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{matrix}\, dt\,,$$

where $k_i(t)$ has the following values :

$$\begin{cases} k_{oi} = \text{const.} & 0 < t < t_i - \Delta_i \\ k_{oi}\, \dfrac{t_i - \Delta_i - t}{2\Delta_i} & t_i - \Delta_i < t < t_i + \Delta_i \\ 0 & \Delta_i + t_i < t \end{cases}$$

Putting these values of k (t) into expressions (9), P (ω) and Q (ω) can be written, after some

rearrangements and simplifications, in a form suitable to a direct nummerical calculation, as follows

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^{n} k_{oi}\, t_i \left(\frac{\sin \omega\, t_i}{\omega t_i}\right) \left(\frac{\sin \omega\, \Delta_i}{\omega\, \Delta_i}\right) \qquad (10)$$

$$Q(\omega) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{k_{oi}}{\omega} - k_{oi}\, t_i \left(\frac{\cos \omega t_i}{\omega\, t_i}\right) \left(\frac{\sin \omega\, \Delta_i}{\omega\, \Delta_i}\right) \qquad (11)$$

These expressions and the graphical method mentioned above enable us to calculate the transfer function by means of tables of $\frac{\sin x}{x}$ and $\frac{\cos x}{x}$.

3 — TESTING TECHNIQUES

3.0 — The two different experimental assemblies and the testing techniques used for determining the frequency response characteristics of the Fuess 82a anemograph are briefly described below.

3.1 — Steady-state tests

Steady-state tests are based on the theoretical grounds presented in 2.1 and are therefore an application of the steady-state method. Fig. 2 shows a sketch of the assembly used.

In order to obtain a stationary input signal simulating a periodic variation of wind velocity, the total pressure tap of the anemograph was connected to a pressure variator by means of a short brass pipe with an orifice in the wall acting as static pressure tap at the inlet of the anemograph.

The pressure variator is a brass box sealed on one side by a rubber membrane which, under the action of a shaft, changes the volume of the box. A central circular hole on the other side of the box forms the connection already described between the box and total pressure tap of the anemograph. The whole system is connected to the compressed air supply by means of a pipe and a regulating valve.

An induction type capsule with a natural frequency of about 40 c/s was used to measure the static pressure at the inlet of the anemograph; the pressure capsule was fitted with two Höttinger Tr2 transducers connected to a Höttinger KWS 11/5 bridge and to a Hellige He4 recorder.

The pressure variator was actuated by a Goodman 390 A electro-magnetic shaker which was controlled by a Hewlett-Packard 202 A low-frequency generator by means of a cathod-follower.

The displacements of the floater of the anegraph were detected by a Höttinger W 10 transducer wich had its core connected to the shaft of the floater. This transducer used another Höttinger KWS 11/5 bridge and another channel of the recorder already mentioned.

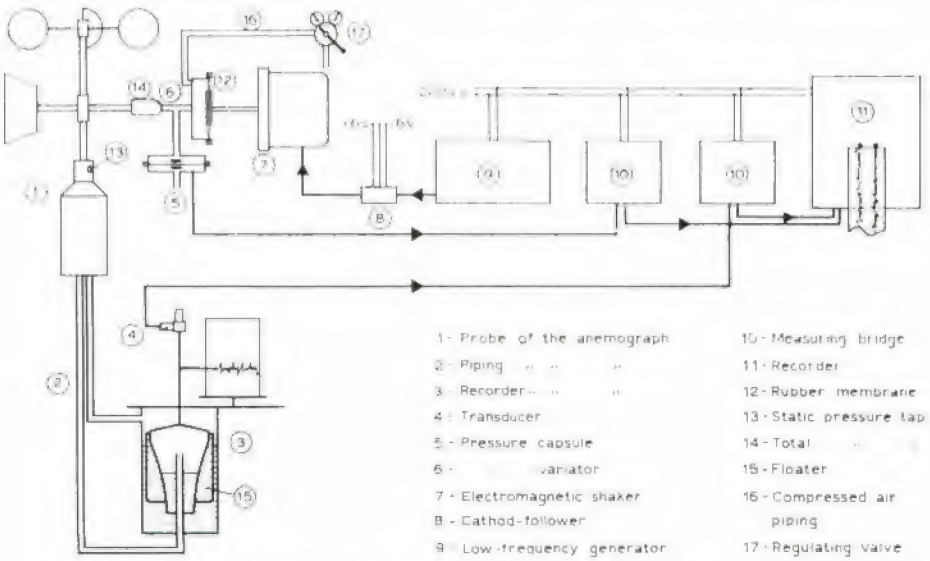


Fig. 2 — Steady-state test assembly

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2

DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

SIDERURGIA NACIONAL – Estruturas da Instalação de Laminagem (2.ª fase).

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS

OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS

CONSTRUÇÕES CIVIS • CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2

DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

NITRATOS DE PORTUGAL

Silo para 30 000 t de Nitrolusal, fundado sobre 968 estacas de betão armado moldadas no terreno, com o comprimento total de mais de 8 quilómetros.

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS

OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS

CONSTRUÇÕES CIVIS • CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

The tests carried out with the assembly just described are presented below.

First the pressure in the system was raised to a value corresponding to the average speed of the wind which we were attempting to simulate. Next the shaker was switched on and tuned in the desired frequency to a suitable amplitude and wave shape. The actual test consisted in a simultaneous recording of the static pressures input in the anemograph) and of the displacements of the shaft of the floater (output of the anemogaph).

As pressure changes within the system were not pure sinusoidals, the corresponding signals were expanded in Fourier series by the graphical method described in [3]. In order to obtain a better accuracy, only the fundamental harmonics of the signals were taken into account in the Fourier analysis and tests were carried out for different frequencies of excitation. From these records we calculated the characteristics of phase and amplitude, which will appear in the next chapter as gain-frequency and phase-frequency curves.

must have a suitable form and must be much shorter than the period corresponding to the highest frequency that we intend to consider. In the special case of mechanical systems these characteristics will provide the signal with a character of percussion.

The tests carried out basically consisted in causing an explosion next to the total pressure tap of the anemograph and recording its response. We used the experimental assembly sketched in fig. 3 and described below.

In this assembly the pipe end leading to the static pressure tap was removed from the surroundings of the explosion. Due to this precaution, which we noticed did not appreciably change the dynamic characteristics of the anemograph, the pressure wave attending the explosion raised the total pressure only, the static pressure remaining approximately constant. Small electric detonators placed about 8 cm ahead the intake were used. The average wind speed was simulated by an air jet. To detect and record the displacements of the floater the instruments described in 3.1 were used.

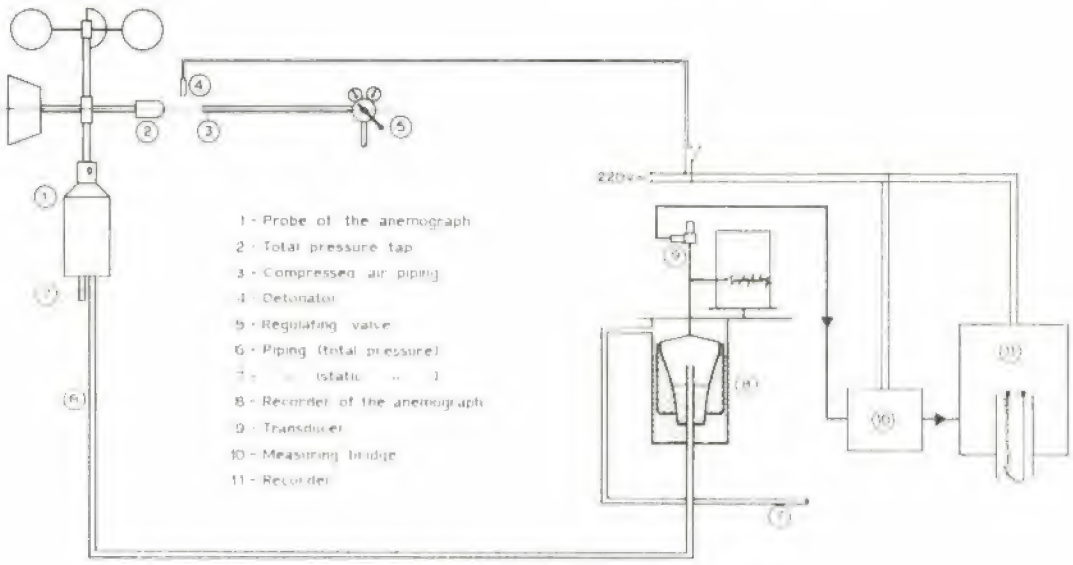


Fig. 3 — Impulsive response test assembly

3.2 — Impulsive response tests

The experimental determination of the impulsive response of a dynamic system consists in recording the response of the system to a signal simulating an impulse. In order that this should be valid in the sense described in 2.2, the signal

4 — INTERPRETATION OF THE RESULTS

The tests were carried out for average wind speeds of 0, 20 and 40 m/s and a frequency range of 0—2 c/s. Figs. 4, 5 and 6 represent the gain-frequency and phase-frequency curves in these conditions. As indicated in the captions

these curves refer to short pipes (2 m of canvas-rubber hose) and long pipes (2 m of canvas--rubber hose + 4 m of aluminium piping), respectively.

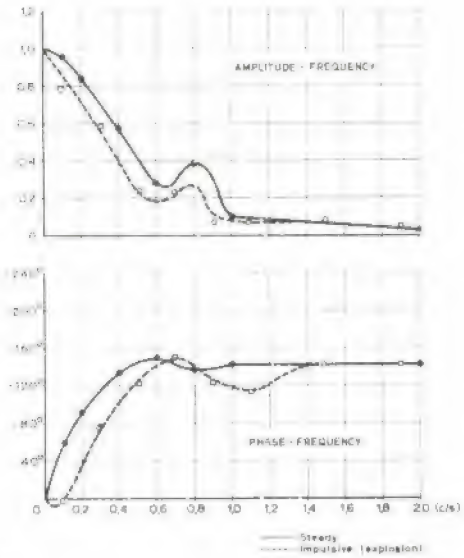


Fig. 4 — Frequency response of fuess anemograph, zero average speed

The non-linearity of the system is striking. When the speed is increased from zero to 20 m/s and then from 20 m/s to 40 m/s the curves are substantially changed. At 20 and 40 m/s there is a first sharp peak between 0.2 and 0.3 c/s which is not apparent in the zero wind speed. A second sharp peak follows between 0.7 and 0.8 c/s.

These two peaks are due to the type of the manometer used in the anemograph. In fact, the floater and the water into which it is plunged form a two-degrees-of-freedom dynamic system. The first peak corresponds to the mode of vibration in which floater and water move in phase with each other, whereas the second peak corresponds to their oscillation in opposition. For wind speeds near zero the oscillation in opposition is over-damped and there is no corresponding resonance peak (Fig. 5).

The length of the piping affects the form of the curves in respect of greater or lesser dampening of the modes of oscillation ande it leaves the values of resonance frequency approximately unchanged. A comparison of long piping and short piping curves shows that dampening in the second mode increases from the former to

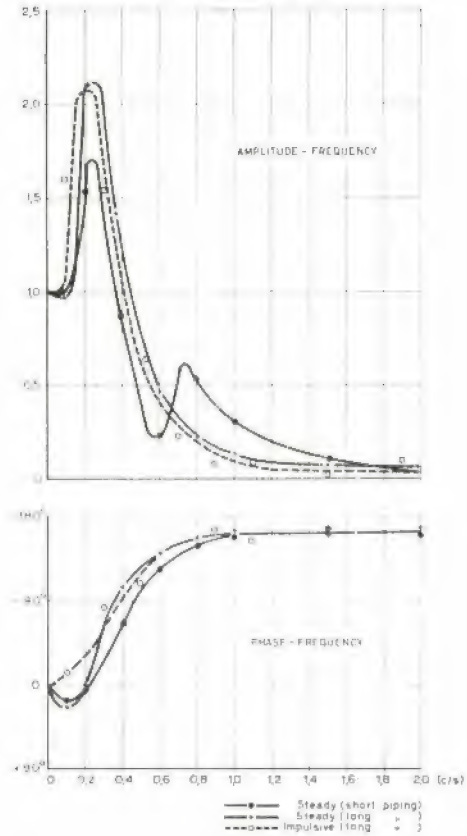


Fig. 5 — Frequensy response of fness anemograph, average speed 20 m/s

the latter. In the case of fig. 5 there is even a disappearance of the second peak and consequently an alteration in the slope of the phase--frequency curve.

Figs. 4 and 5 show a reasonable agreement between the experimental points obtained by the impulsive response method and by the steady--state method.

5 — CONCLUSIONS

The tests described were carried out with a view to determining the frequency response of a Fuess 82a anemograph to a wind presenting fluctuations in the direction of the mean speed. The results obtained were presented and interpreted in the last chapter.

The conclusions are the following :

a) Bearing in mind the simplifying assumptions and the restrictions presented as regards natural winds, both methods described to be able to yield the frequency response of floater-type anemographs. If we take into consideration the

fundamental differences between the two methods and the nature of the instruments under study, the agreement between both experimental results seems satisfactory.

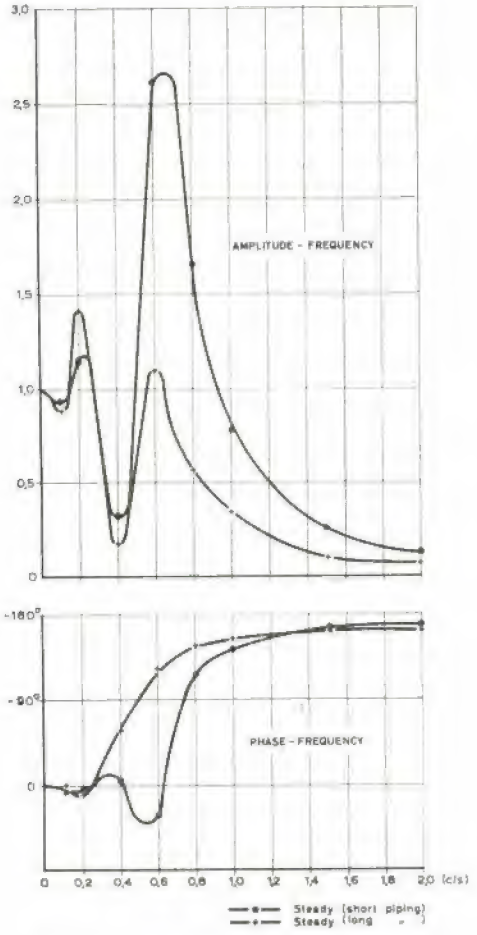


Fig. 6 — Frequency response of fuess anemograph, average speed 40 m/s

b) Floater-type anemographs are not adequate for the complete analysis and characterization of wind as a randcm load. In particular, they are unsuited for the experimental determination of the energy spectrum of natural wind turbulence for frequencies higher than 0.1 c s and it provides a frequency response which is inadequate for the study of maximum gust speeds. Our opinion is that these deficiencies are inherent to the mechanical nature of the manometer (floater-type) and consequently are characteristic of every anemograph of this type.

ACKNOWLEDGMENTS

Thanks are due to the Director, «Laboratório Nacional de Engenharia Civil» for permission to publish this paper.

Thanks are also due to my colleagues Jervis Pereira and Mário Castanheta for the helpful advise and criticism offered.

REFERENCES

[1] — Davenport, A. G — «The Spectrum of Horizontal Gustiness Near the Ground in High Winds», Quart. J. Roy Met. Soc. Vol. 87, n.° 372 (1961).

[2] — Hoven, I. van der — «Power Spectrum of Horizontal Wind Speed in the Frequency Range from 0.0007 to 900 Cycles per Hour», J. of Met. Vol. 14, pág. 160-164 (1957).

[3] — Kármán, T. von and Biot, M. A. «Mathematical Methods in Engineering», Mc Graw Hill (1940).

[4] — Naslin, P. — «Les Régimes Variables dans les Systèmes Linéaires et Non-linéaires», Dunod (1964).

[5] — Solodovnikov, V. V. — «Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems», Dover (1960).

[6] — «Estudo da Resposta em Frequência de Anemógrafos», L.N.E.C. Internal Report, Proc. 37/ /1/612 (1965).

NOTICIÁRIO

Simpósios Imeko

Está prevista a realização futura dos seguintes simpósios IMEKO (International Measurement Confederation):

1) Simpósio sobre Detectores Electroquímicos. De 3 a 5 de Outubro de 1968, em Veszprém, Hungria.
   Informações: IMEKO Secretariat, Budapest 5, P.O.B. 457, Hungria.
2) Simpósio sobre Educação Superior:
   De 17 a 21 de Setembro de 1968, em Berlim e Rostock, República Democrática Alemã.
   Contribuições e Informações: Deutsche Gesellschaft fur Messtecknik und Automatisierung in der KdT, Berlim W 8, Clara Zetkin Str. 115-117, República Democrática Alemã.
3) Simpósio sobre Pesagem Industrial:
   De 15 a 17 de Outubro de 1968, em Braunschweig, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, República Federal Alemã.
   Contribuições e Informações: Dr. Kurt Hild, Bundesallee, 100 — Braunschweig, República Federal Alemã.
4) Simpósio sobre Tratamento da Informação em Sistemas de Medida.
   Em Setembro de 1969, em Smolenice, Checoslováquia. Informação: IMEKO Secretariat, P.O.B., 457, Budapest, 5, Hungria.
5) Simpósio sobre Produção de Combustíveis:
   Em Setembro de 1969, em Pau, France.
   Informações IMEKO Secretariat, P.O.B. 457, Budapest 5 — Hungria.
6) 4.º Simpósio sobre Detectores de Fotões: Em Junho de 1969, em Praga, Checoslováquia.
   Informações IMEKO Photon-Detectors.
   Prof. P. Görlich.
   VEB Carl Zeiss, Jena, República Democrática Alemã.

1.º Simpósio Europeu sobre Pavimentos de Betão
Paris, 2 a 4 de Julho de 1969

O simpósio, organizado pela Cembureau, sob o patrocínio da Associação Internacional Permanente dos Congressos sobre Estradas, examinará o modo como a experiência pode ser usada, com vantagens no futuro. Não se pretende dar uma panorâmica completa de todos os pavimentos de betão e as suas fases mas sim focar determinadas questões especializadas actualmente de particular interesse na Europa.

Os temas principais serão, Juntas (Tipos, eficiência), Acabamento da superfície, Materiais, Manutenção e reparação e Pavimentos contínuos de betão armado.

Línguas oficiais — Inglês, Francês e Alemão.

Jornadas Nucleares 1968

A décima edição das «Jornadas da Energia Nuclear» terá lugar em Milão, por iniciativa da FAST (Federação das Associações Científicas e Técnicas) de 12 a 14 de Dezembro de 1968. O tema do Congresso deste ano terá por eixo a utilização nuclear, os problemas económicos do enriquecimento, as etapas da transformação do combustível, o tratamento do combustível irradiado e as estratégias do combustível.

Preside à Comissão organizadora o Prof. Piero Caldirola.

Comissão Internacional de Irrigação e Drenagem
Comissão Nacional Portuguesa

Brevemente será posto à venda o Bulletin Annuel ao preço de US $2,00.

Os pedidos devem ser feitos por intermédio desta Comissão Nacional Portuguesa.

Já pensou...

... que o seu anúncio
é muito mais eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos.

técnica REVISTA DE ENGENHARIA

Avenida Rovisco Pais • Lisboa 1 • Telef. 77 54 49

FILTROS TECIDOS

PARA GAZES E LÍQUIDOS
EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

C. D. U. 627.821.3

ARCOS DE BARRAGENS EM ESPIRAL LOGARÍTMICA

Por J. VALENTE DA SILVA
Engenheiro Civil

RESUMO

Apresenta-se uma análise expedita das possibilidades da curva em espiral logarítmica, utilizada como directriz de arcos de barragens.

Seguidamente, e depois de algumas considerações sobre as cargas unitárias a utilizar, apresenta-se a teoria dos arcos em espiral.

SYNOPSIS

A quick analysis of the potenciality of the logarithmic spiral used as directrix of dam arches is presented.

Following a few considerations on unit loads to be used, is presented the theory of spiral arches.

I — INTRODUÇÃO

Ao definir uma barragem abóbada, considerando devidamente os objectivos economia e segurança, são muitos e de difícil resolução os problemas a vencer.

Geralmente obtêm-se, por tentativas, soluções garantindo mais ou menos aqueles objectivos, mas que, na verdade, se podem afastar significativamente daquela que, embora desconhecida, seria a solução mais aconselhável.

Entre as dificuldades, e são muito diversas, salientam-se as referentes ao cálculo analítico da barragem pois que, muitas vezes, só por si, limitam grandemente o campo das soluções possíveis.

Pode dizer-se que todos os cálculos se baseiam em hipóteses simplificativas, delas dependendo as dificuldades de execução de tais cálculos.

De acordo com uma de tais hipóteses a estrutura — barragem — é substituída por um conjunto de arcos e consolas, em parte considerados separadamente. Os arcos são calculados supondo-os sujeitos à acção de diversas cargas tipo e de igual forma são consideradas as consolas.

Assim, compreende-se que, ao definir uma barragem, se procurem arcos simples de calcular, sendo esta uma das razões justificando nesta perspectiva, grande parte das barragens de arcos circulares existentes.

A escolha destes arcos, sem dúvida funcionais em certos casos, é, em muitos outros, desaconselhável, como se tem vindo a reconhecer com a definição de estruturas, onde os arcos têm forma diversa da circular; têm sido utilizados, por exemplo, arcos parabólicos, elípticos, em espiral logarítmica, etc.

Sobre os arcos em espiral logarítmica apresenta-se, no presente artigo, depois de fazer uma análise expedita acerca do seu interesse no que se refere à definição de barragens, a teoria que elaboramos, partindo de cargas unitárias especialmente definidas.

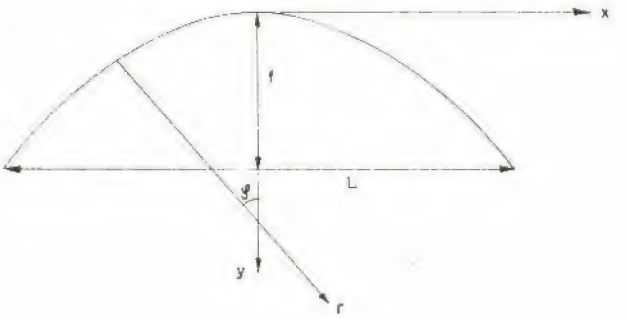
II — ESTUDO SUMÁRIO DA CURVA EM ESPIRAL

1. É um breve estudo comparativo entre arcos em espiral logarítmica e outros tipos de arcos, usados com maior ou menor frequência em barragens, o que iremos fazer. Sendo os arcos circulares casos particulares dos arcos em espiral, a análise incidirá sobre os de directriz parabólica, elíptica, em ciclóide e em catenária.
2. Definição analítica das directrizes

2.1. — Parabólicas (2.º grau)

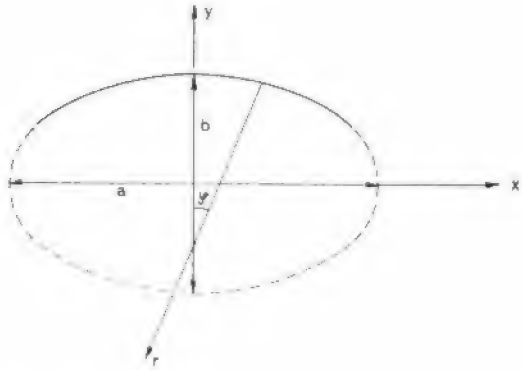
$$y = \frac{4K}{L} x^2$$

$$\text{com } K = \frac{f}{L}$$



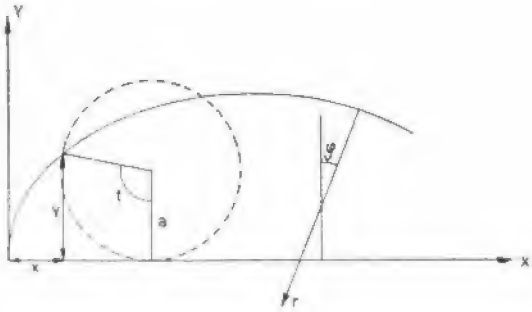
2.2. — **Elípticas**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



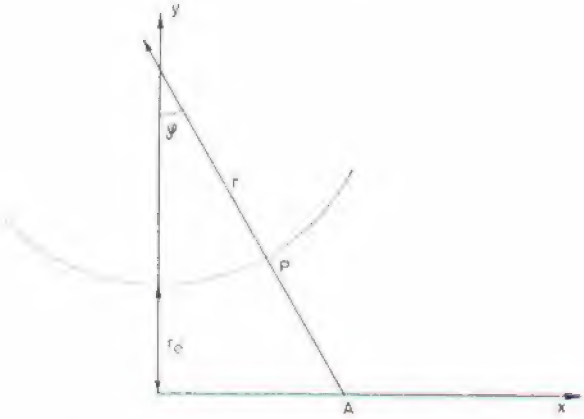
2.3 — **Em ciclóide**

$$x = c\ (1 - \text{sen}\ t)$$
$$y = c\ (1 - \cos\ t)$$



2.4 — **Em catenária**

$$y = r_0\ \text{ch}\ \frac{x}{r_0}$$



3. Raios de curvatura das directrizes dos arcos

3.1 — **Em espiral logarítmica**

$$r = r_0 e^{k\varphi}$$

3.2 — **Parabólicos**

$$r = r_0 \frac{1}{\cos \varphi^3} \quad \text{com } r_0 = \frac{L}{8\ K}$$

3.3 — **Elípticos**

$$r = r_0 \frac{1}{(n^2\ \text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)}$$

$$\text{com } n = \frac{a}{b} \text{ e } r_0 = an$$

3.4 — **Em ciclóide**

$$r = r_0 \cos \varphi \quad \text{com } r_0 = 4\ c$$

3.5 — **Em catenária**

$$r = r_0 \frac{1}{\cos \varphi^2} = \overline{PA}$$

4. Interessa verificar em que medida cada uma das curvas mencionadas pode ser substituída pela espiral, de tal forma que os arcos tenham comportamento semelhante. Estando este comportamento fortemente ligado à lei de variação da curvatura, pareceu lógico utilizar as funções $r = f\ (\varphi)$ para efectuar a referida análise.

Por outro lado e na medida em que seja razoável admitir essa semelhança, uma nova questão de interesse surge, consistindo na determinação das constantes que definem o arco em espiral.

Sendo, como se viu, os raios de curvatura da espiral logarítmica traduzidos por uma expressão do tipo

$$r = r_0\ e^{k\varphi}$$

interessa, pois, determinar, para um caso concreto, os valores de r_0 e k.

Para tanto e variando os logarítmos dos raios de curvatura linearmente com φ, como se conclui da expressão anterior, um processo expedito, para se ter uma primeira ideia, consiste na represen-

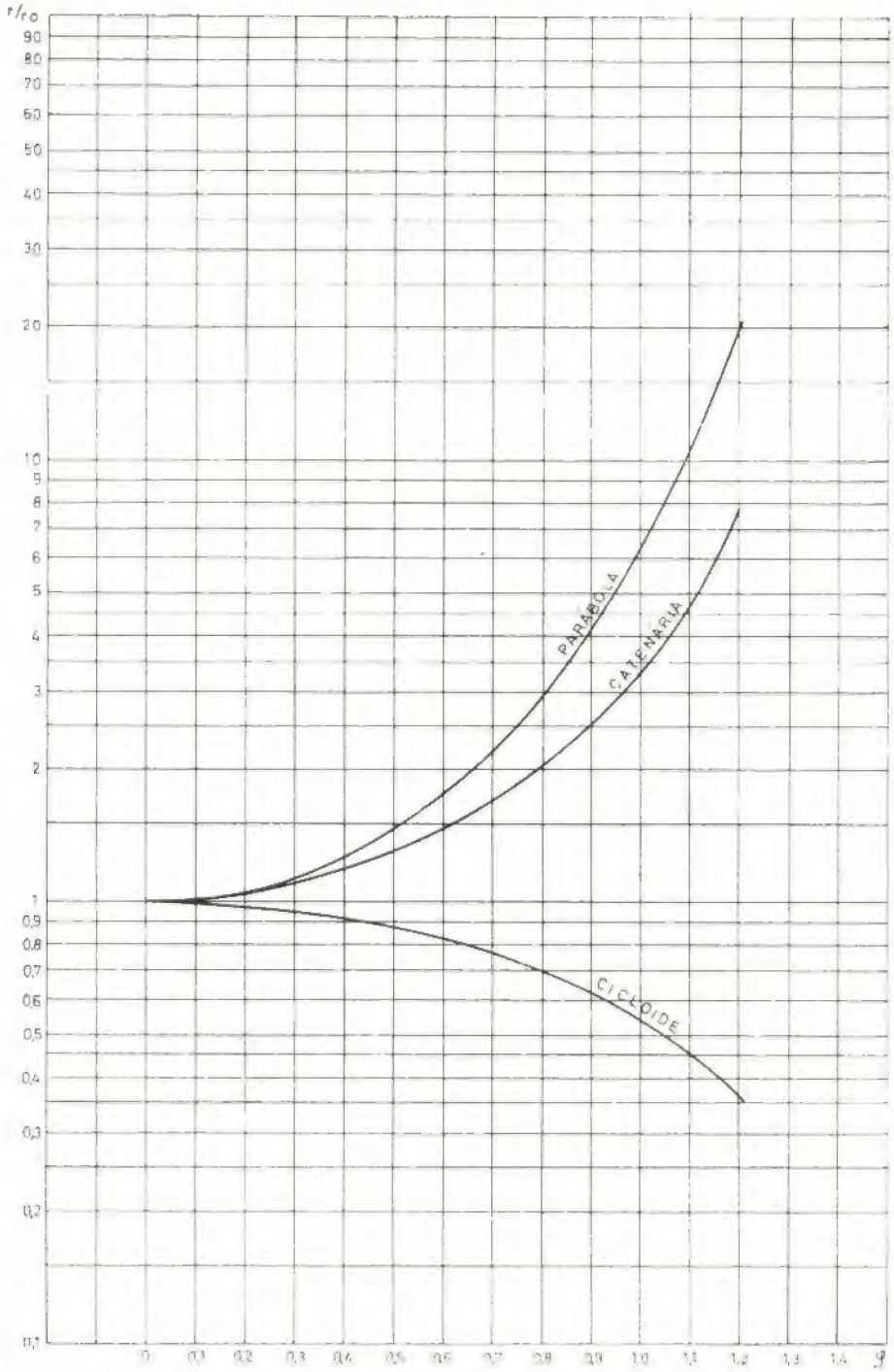


Fig. 1

tação gráfica das curvas em papel semi-logarítmico.

Foi o que se fez para a parábola, a catenária e a ciclóide, estando, como se verifica pela figura, representados, em função de φ, os valores $\frac{r}{r_0}$.

Como primeira conclusão verifica-se que quanto maior for φ menor será a possibilidade duma razoável substituição das curvas.

No entanto, relativamente à elipse, não se passam, de igual forma, as coisas. Na figura seguinte vê-se claramente, e como era de esperar, que, para valores de n vizinhos da unidade, os valores de $\log \frac{r}{r_0}$ variam quase linearmente com φ.

Para valores de n afastados de $n = 1$ os desvios são maiores mas não aumentam necessàriamente na medida em que φ também aumente.

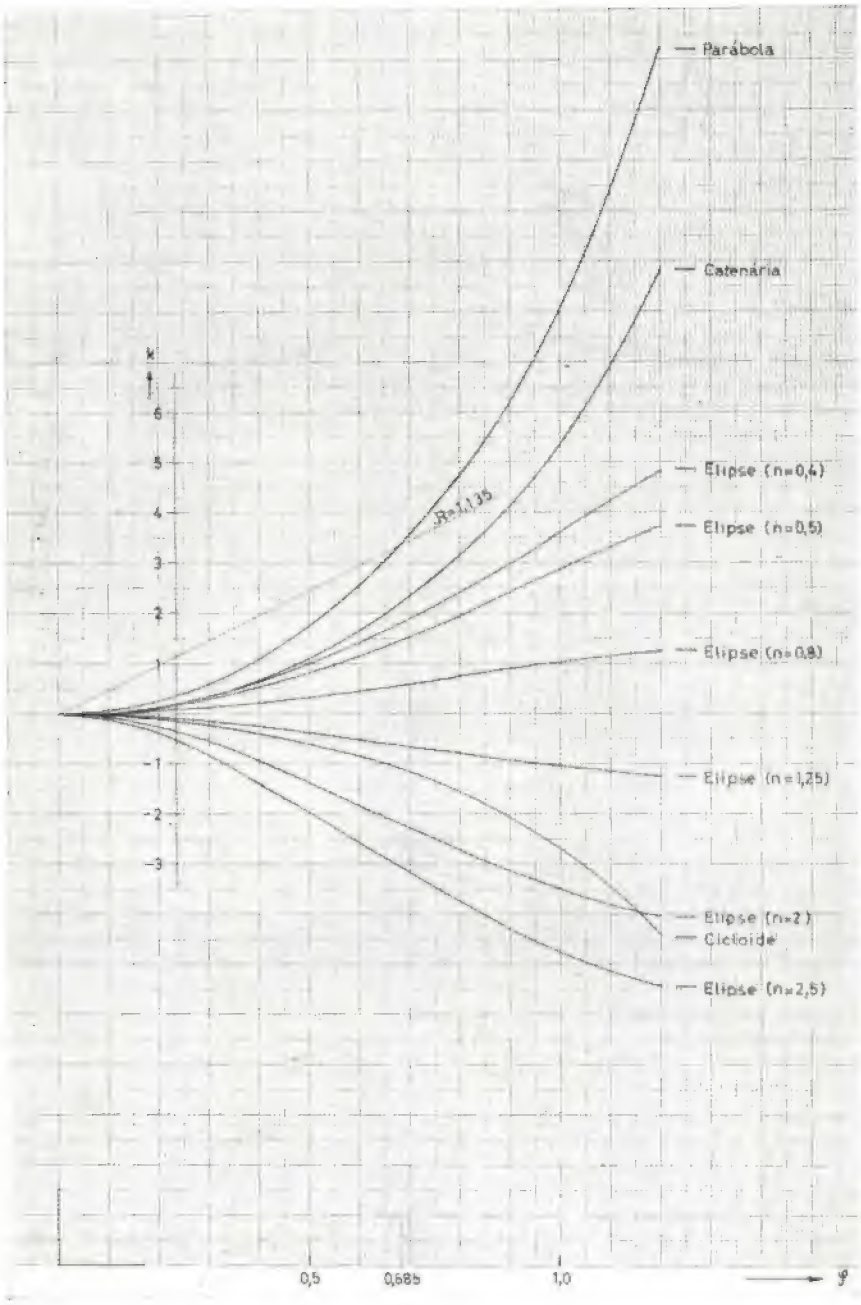


Fig. 2

Sendo a parábola, como sugere a representação gráfica das curvas, a que possìvelmente mais se afasta da espiral logarítmica (considerando apenas o conjunto dos valores de φ que pràticamente interessa) fez-se uma análise, mais pormenorizada, estudando um arco parabólico.

Definiu-se então, um arco de momento de inércia reduzido constante com

$$K = 0{,}2 \quad e \quad \frac{e_0}{L} = 0{,}04$$

sendo e_0 a espessura no fecho e L a corda.

Na nascença do arco sabe-se que $\operatorname{tg} \varphi = 4\,K$ e por isso, com $K = 0{,}2$, vem $\varphi \simeq 0{,}685$.

Seguidamente determinou-se, para diversos valores de φ, entre 0 e 0,685, os correspondentes valores de $y_0 = -3 \log \cos \varphi$ e, pelo método dos mínimos quadrados, a recta.

$$y = \log a + k\,\varphi,$$

achando para k o valor 1,135. Com este dado e com $\varphi = 0{,}685$ foi calculado, para uma deter-

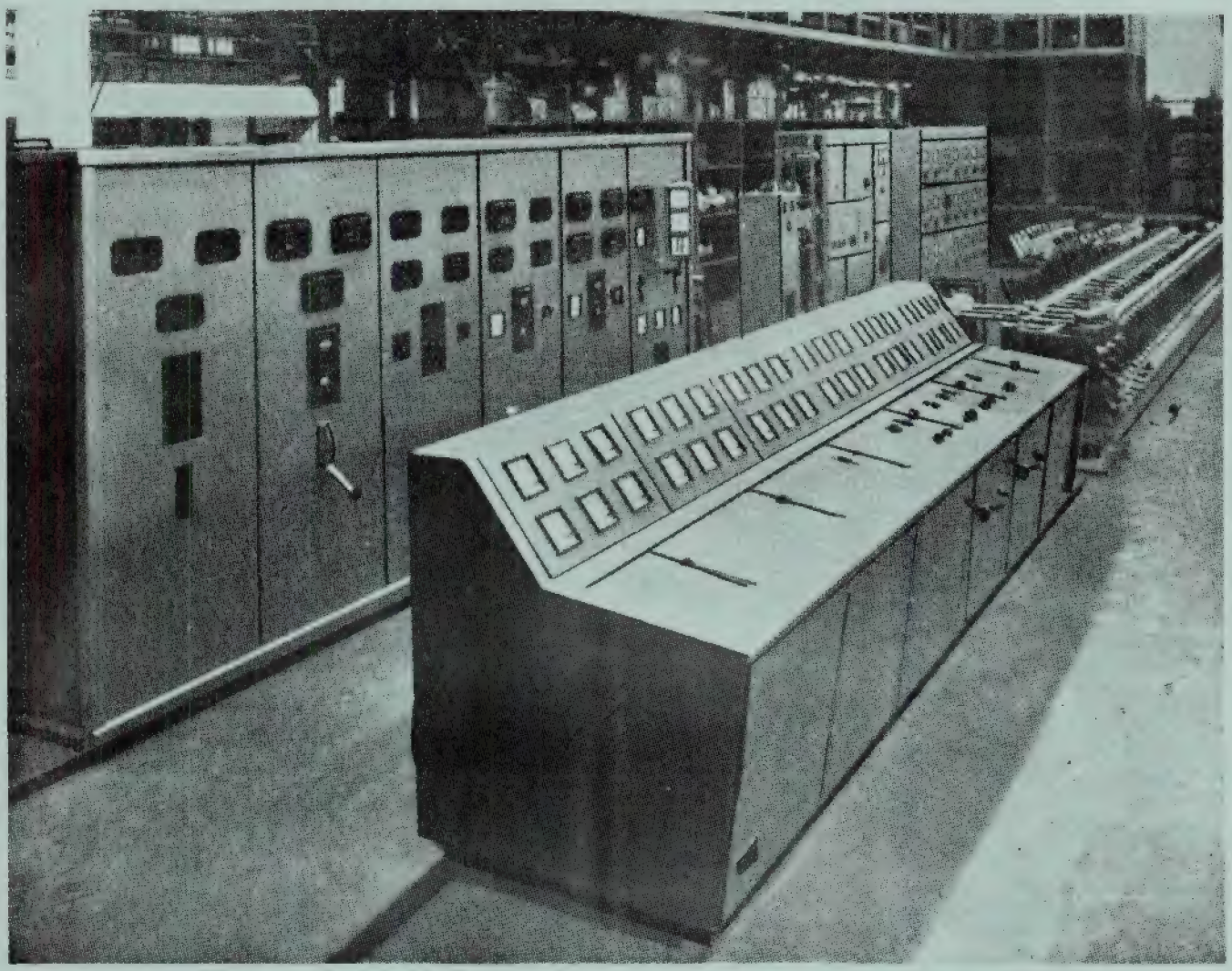
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



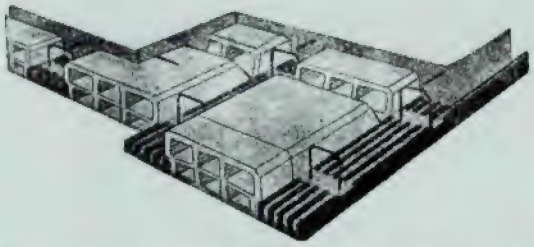
Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

PRÉ - ESFORÇADOS CERÂMICOS

PATIAL

patente stahlton



PAVIMENTOS, TECTOS, FORROS, COBERTURAS, ASNAS, SILOS

CERVAL

CERÂMICA VALE DE LOBOS, L.DA

R. JOAQUIM A. AGUIAR, 41, 5.º-D. - LISBOA - TEL. 53 11 38/9/0

Companhia Portuguesa de Trefilaria

S. A. R. L.

ARMADURAS PRÉ-FABRICADAS **MALHASOL**

Tensão de segurança 3.000 Kgf / cm²

AÇO BI

Tensão de segurança 4.000 Kgf / cm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO

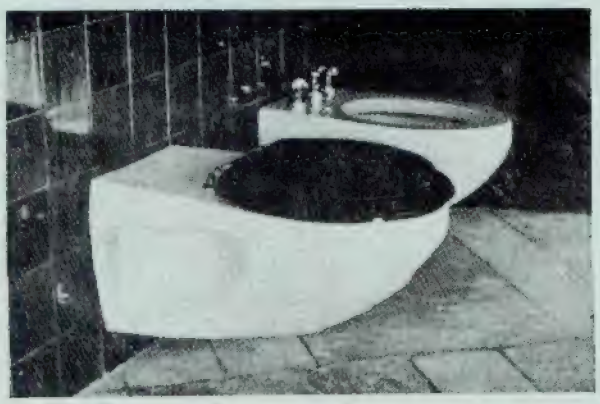
que pela eficiência técnica e económica a que conduzem, são um indispensável elemento na moderna construção civil

Para qualquer obra em betão armado consulte:

DIAL — GABINETE TÉCNICO

R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º Dt.º

TELEFONES 67 12 24/5 e 67 37 85 - LISBOA



Actualize também a sua sala de banho .. Use TRITON a marca que equipa os hoteis RITZ, TIVOLI e CIDADELA, etc.

GUEDAL

Av. República, 64-A — Telef. 77 94 30

minada corda L = 198,217, o valor de r_0 pela expressão

$$r_0 = \frac{L\,(1 + k^2)}{2\,[\,e^{k\varphi}\,(k \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi) - k]}$$

ou seja $r_0 = 104{,}46$

Repare-se que outro valor de r_0 pode determinar-se, de forma diferente, desde que não se pretenda manter a inclinação da directriz na nascença do arco.

Se os valores de y_0 forem calculados pela expressão

$$y_0 = \log \frac{L}{8\,k} - 3 \log \cos \varphi$$

a nova recta

$$y = \log a + k\varphi,$$

obtida como ficou indicado, permite obter r_0; será, deste modo, $r_0 = a$.

Repare-se, ainda, que uma possibilidade de aumentar a precisão do ajustamento entre as duas curvas, de conseguir, no fim de contas, uma solução mais conveniente, resulta de, ao aplicar o método dos mínimos quadrados, saber pesar convenientemente os pontos escolhidos.

Na terceira das figuras, que se apresentam, estão desenhados os dois arcos que como se vê pouco se afastam.

Determinou-se, seguidamente, o estado de tensão em cada um dos arcos, devido a uma pressão hidrostática $p = 1\ T/m^2$.

Obtiveram-se valores bastante semelhantes sendo, em nosso entender, as diferenças obtidas, mais consequência das imprecisões do cálculo, que devidas ao facto de os arcos não serem absolutamente iguais.

Determinada, assim, a expressão dos raios de curvatura da espiral, a equação desta curva em coordenadas polares será:

$$R = \rho e^{k\varphi}$$

com

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} k$$

$$\theta = \varphi + \theta_0$$

$$\rho = \frac{r_0\, e^{-k\theta_0}}{\sqrt{1 + k^2}}$$

Parece, pois, poder concluir-se que é possível, pelo menos relativamente às curvas apresentadas, conseguir, sempre, uma espiral logarítmica que, aproximando-se o suficiente de uma delas, a possa substituir com precisão bastante.

A ser assim, compreende-se que formulada

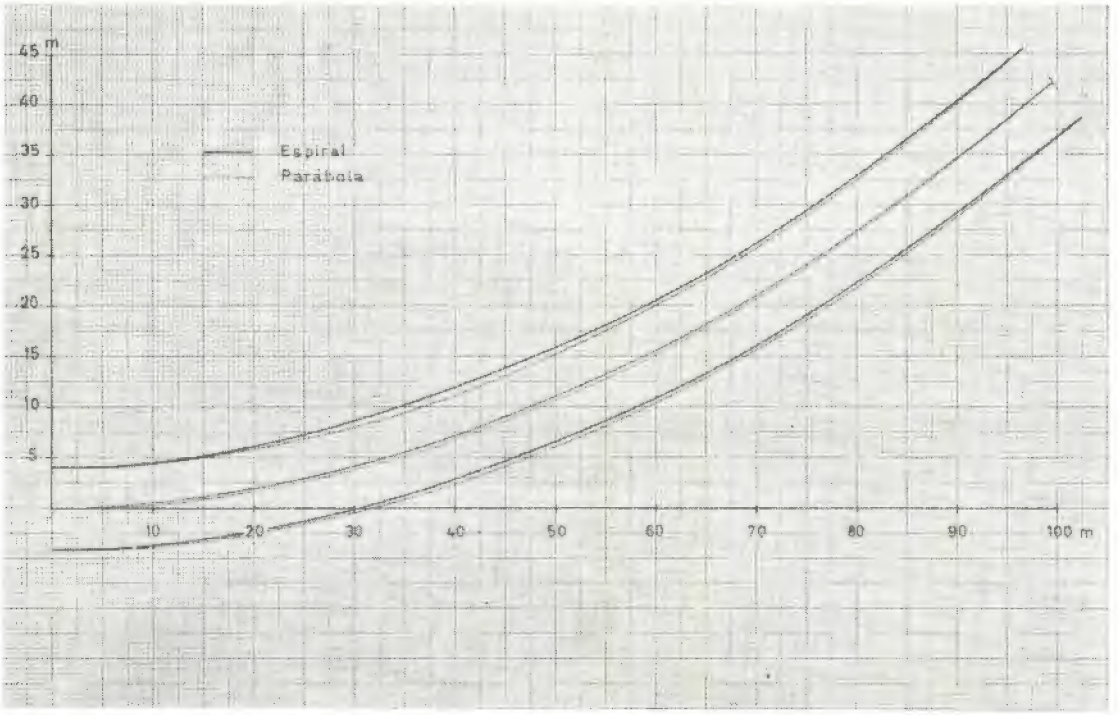


Fig. 3

uma vez, e com generalidade, a teoria dos arcos em espiral se fique de posse de elementos para neste domínio resolver com eficácia muitos dos problemas que a prática apresente.

Quanto ao método utilizado na determinação das constantes r_0 e k pensa-se que poderá, eventualmente, ter interesse prático.

III — CARGAS UNITÁRIAS

É usual no cálculo dos arcos considerar cargas unitárias triangulares. Estas cargas, que variam linearmente entre pontos da directriz dum arco, conduzem, em geral, a expressões demasiado extensas e complexas que tornam moroso todo o processo de cálculo.

Pensou-se, por isso, ao delinear a resolução dos arcos em espiral logarítmica, em outro tipo de cargas que, na medida do possível, tornassem o processo de cálculo mais rápido e permitissem abordar o problema com mais generalidade.

Foi-se assim conduzido à utilização de fórmulas que não dificultassem a resolução dos integrais, constantes das diversas expressões, necessárias ao cálculo dum arco.

Sendo as directrizes dos arcos, espirais logarítmicas, a utilização de exponenciais na definição das cargas, leva, como adiante se verá, a integrações relativamente fáceis sendo, por isso, aconselhável a sua utilização para traduzir essas cargas unitárias.

Foi o que se fez, recorrendo a expressões da forma:

$$h' = K' e^{n\varphi}$$

sendo, cada carga unitária, definida arbitrando um valor para n.

Como se verifica, se $n = o$, vem $h' = K'$, traduzindo portanto uma carga uniformemente distribuída.

Considerando, por exemplo, apenas deslocamentos radiais, e sendo m os pontos de ajustamento de deslocamentos, a carga total sobre o arco será:

$$H(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} K'_i e^{n_i \varphi},$$

sendo os valores de K'_i ou de K_i, com $K_i = CK'_i$, obtidos das equações que traduzem a igualdade dos deslocamentos e a constância das pressões hidrostáticas, em cada um dos pontos de ajustamento.

A utilização de cargas como estas, contínuas ao longo de cada semi-arco, reduz o trabalho de cálculo, existente ao considerar cargas triangulares, pois que, agora, não se torna necessário preparar expressões para determinar os esforços e os deslocamentos relativamente a cada uma das cargas unitárias.

No caso vertente, as expressões são formalmente idênticas variando, apenas, os valores dos parâmetros, sendo assim, possível, uma vez obtida a expressão genérica, relativa, por exemplo, ao esforço axial, obter o valor deste esforço, em qualquer ponto e para qualquer das cargas unitárias, dando a φ e a n os valores correspondentes.

Sendo os valores de n fixados «a priori», compreende-se que tais valores devam ser arbitrados de forma a que as cargas unitárias se desenvolvam ao longo dos arcos de forma nìtidamente distinta.

Como se disse, a escolha de cargas definidas por exponenciais foi motivada pela geometria dos arcos, definidos de forma semelhante.

Dentro desta ordem de ideias, ao recorrer a um arco de outro tipo, certamente convirá definir cargas atendendo à expressão da directriz desse arco e de forma a obter expressões fáceis de integrar.

Pode-se referir, a título de exemplo, que ao efectuar o cálculo expedito duma barragem, em que apenas se ajustaram pontos da consola central, considerando cargas uniformemente distribuídas nos arcos, se fez esse ajustamento supondo a consola sujeita a cargas unitárias do tipo:

$$K x^n$$

isto é, definidas por expressões de certa maneira em correspondência com forma como foi definida a consola — uma expressão polinomial em x.

Foi possível, em virtude de tal procedimento, uma sistematizacão fácil do processo de cálculo, conduzindo a uma maior simplicidade.

A carga final na consola

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} K_i x_i^n$$

ficou definida conhecendo os valores de K_i determinados ao efectuar o ajustamento.

IV — ARCOS EM ESPIRAL LOGARÍTMICA — TEORIA

1 — *Definição*

1.1.

a) Directriz

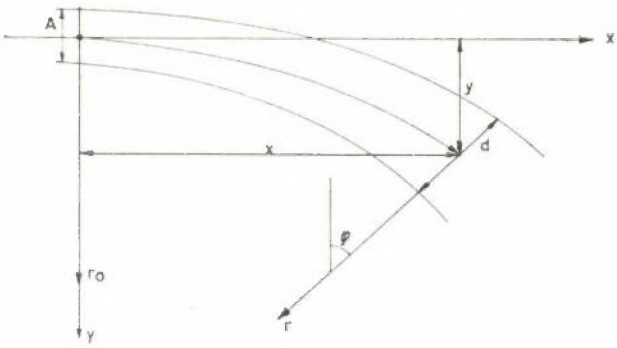
$$r = r_0 \, e^{k\varphi}$$

b) Espessura

$$d = A \, e^{a\varphi}$$

A espessura — d — é medida normalmente à directriz, metade para cada lado; r — representa o raio da curvatura da directriz no ponto φ; A, r_0, a e k são constantes.

A figura que se segue traduz esquemàticamente as expressões anteriores.



1.2 — **Solicitação. Cargas tipo**

a) Carga normal

$$h' = m \frac{e^{n\varphi}}{1 + \frac{A}{2\,r_0} e^{(a-k)\varphi}}$$

h' — valor da pressão normal, correspondente ao ângulo φ, actuando no paramento de montante.

b) Tangencial

$$t = m \frac{aA}{2\,r_0} e^{(n+a-k)\varphi}$$

actuando na directriz do arco.

c) de torsão

$$\mathfrak{M} = m \frac{a\,A^2}{4\,r_0} e^{(n+2a-k)\varphi}$$

também distribuída segundo a directriz.

2 — *Relações principais*

2.1.

a) Directriz

Efectuando na expressão $r = r_0 \, e^{k\varphi}$ as seguintes substituições:

$$\varphi = \Theta - \Theta_0$$

$$r = R \sqrt{1 + k^2}$$

$$r_0 = \rho \sqrt{1 + k^2} \; e^{k\Theta_0} \qquad (1)$$

vem:

$$R = \rho \, e^{k\Theta}$$

que, em coordenadas polares, sendo R e Θ as variáveis representa uma espiral logarítmica.

O raio de curvatura em Θ vale:

$$\frac{(R^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2R'^2 - RR''} = \rho \sqrt{1 + k^2} \; e^{k\Theta} = r$$

o que permite concluir que a expressão $r = r_0 \, e^{k\varphi}$ dá, de acordo com (1), os raios de curvatura da espiral $R = \rho \, e^{k\Theta}$, podendo o estudo dum arco fazer-se partindo de qualquer das expressões anteriores.

Porém, a equação da espiral logarítmica, em coordenadas polares, leva a cálculos menos complicados e por isso, definido um arco conforme foi indicado em 1), parece conveniente efectuar as substituições, atrás referidas, e prosseguir os cálculos, a partir da expressão obtida.

Nota-se, entretanto, que se poderia, logo de início ter definido o arco, a sua directriz, pela expressão $R = \rho \, e^{k\Theta}$

Pareceu, todavia, que a forma a que se recorreu, isto é, utilizando a expressão $r = r_0 \, e^{k\varphi}$ é mais elucidativa, e por isso preferível. Com efeito, quer o raio de curvatura no fecho do arco quer o seu ângulo de inserção aí aparecem e são elementos que, na verdade, auxiliam a sentir o comportamento da estrutura.

Definida então a directriz

$$r = r_0 \, e^{k\varphi},$$

o valor de ρ, em $R = \rho\, e^{k\Theta}$, é dado por:

$$\rho = \frac{r_o}{\sqrt{1 + k^2}}\; e^{-k\Theta_o}$$

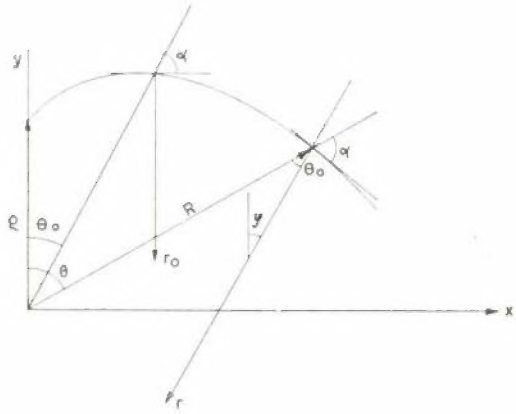
sendo, nesta expressão, desconhecido o valor de Θ_o, ou seja, o valor de Θ quando $\varphi = 0$.

Mas quando $\varphi = 0$, como é fácil verificar no esquema seguinte, y é máximo, e, por isso

$$\frac{dy}{d\Theta} = 0 = k \cos \Theta_o - \operatorname{sen} \Theta_o$$

e,

$$\Theta_o = \operatorname{arc\,tg}\, k$$



Repare-se que a directriz, inicialmente definida entre 0 e φ, agora, em coordenadas polares, tem por limites Θ_o e $\Theta = \varphi + \Theta_o$.

Pode verificar-se também que, por ser Θ_o constante, o ângulo α é independente de Θ pois que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \Theta_o$

Em síntese, tem-se já as três relações fundamentais, seguintes:

$$\Theta_o = \operatorname{arctg}\, k$$

$$\Theta = \varphi + \Theta_o$$

$$\rho = \frac{r_o}{\sqrt{1 + k^2}}\; e^{-k\Theta_o}$$

b) Espessura

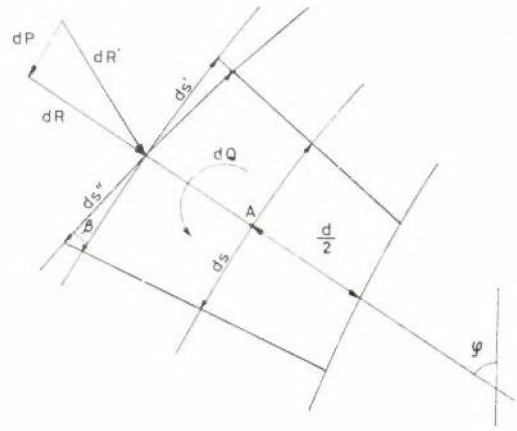
Atendendo a que $\varphi = \Theta - \Theta_o$

será:

$$d = A\; e^{a(\Theta - \Theta_o)}$$

2.2 — Solicitação

a) Relação entre as cargas tipo.
Atendendo ao esquema



e sendo $dR' = h'ds''$, vem:

$$dR' = \frac{h'\; ds'}{\cos \beta} = \frac{h'}{\cos \beta}\left(1 + \frac{A}{2\, r_o}\; e^{(a-k)\varphi}\right) ds$$

ou, atendendo ao valor de h'

$$dR' = m\, \frac{e^{n\varphi}}{\cos \beta}\, ds.$$

Calculando os elementos de redução de dR', em relação ao ponto A, vem:

$$dR = h\, ds = dR' \cos \beta$$

$$dP = t_1 ds = dR \operatorname{tg} \beta$$

$$dQ = \mathfrak{M}_1 ds = dR' \frac{d}{2} \operatorname{sen} \beta$$

e, agora, fàcilmente, se verifica que

$$h = m\, e^{n\varphi},$$

$$t_1 = m\, e^{n\varphi} \operatorname{tg} \beta$$

ou por ser $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}\, \frac{dd}{ds} = \frac{aA}{2r_o}\; e^{(n+a-k)\varphi}$

$$t_1 = m\, \frac{aA}{2\, r_o}\; e^{(a-k\varphi)}$$

ou $t = t_1$

e, ainda, que

$$\mathcal{M}_1 = m\, e^{n\varphi} \frac{d}{2} \operatorname{tg} \beta = m \frac{a\, A^2}{4\, r_o} e^{(n+2a-k)\varphi}$$

ou

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$$

Concluiu-se, então, que a solicitação C. H. P. H. tal como foi definida em 1.2) é equivalente à soma das três solicitações h, t e M, todas actuando na directriz do arco.

Pode assim evitar-se a aproximação, tão comum, de considerar a pressão hidrostática distribuída segundo a directriz.

É certo que este maior rigor implica uma maior extensão dos cálculos, nos casos em que apenas interesse um ajustamento radial.

Porém, sempre que os outros deslocamentos se ajustem, além dos normais, já esse inconveniente se atenua ou mesmo desaparece.

Efectivamente, e, por exemplo, no caso dum triajustamento no plano dos arcos, os cálculos a executar por se considerarem as solicitações t e $\mathcal{M}$, sendo também necessários para se atender aos deslocamentos tangenciais e angulares, não resultam por isso num acréscimo de trabalho.

Repare-se, ainda, que as coisas só se passam assim se as solicitações, tangencial e de torsão, forem respectivamente t e $\mathcal{M}$ tal como as definimos relativamente a h'.

Quanto aos erros devidos à dita simplificação, sendo os arcos de espessura constante (a = o) tanto t como $\mathcal{M}$ são sempre nulos e assim os erros, em geral pequenos, são, de certa maneira, revelados pela expressão $\frac{A}{2\, r_o} e^{-k\varphi}$.

Sendo a $\neq$ o, em igualdade de outros parâmetros, tem-se, normalmente, desvios ainda maiores.

b) Expressões das cargas efectuando a mudança de variáveis, atrás referida.

1) $h = m\, e^{n\varphi}$

por ser $\varphi = \theta - \theta_o$

vem: $h = m\, e^{-n\theta_o} e^{n\theta}$

2) $t = m \frac{aA}{2\, r_o} e^{(n+a-k)\varphi}$

$$t = m \frac{aA\, e^{-(n+a)\theta_o}}{2\, \rho \sqrt{1+k^2}} e^{n'\theta}$$

com $n' = n + a - k$

3) $\mathcal{M} = m \frac{aA^2}{4\, r_o} e^{(n+2a-k)\varphi}$

$$\mathcal{M} = m \frac{aA^2\, e^{-(n+2a)\theta_o}}{4\, \rho \sqrt{1+k^2}} e^{n''\theta}$$

com $n'' = n + 2a - k$

3. Cálculo dum arco

3.1. — Sistema base

O sistema inicial, três vezes hiperstático, foi seccionado, em dois semi-arcos, no ponto φ = o (fecho).

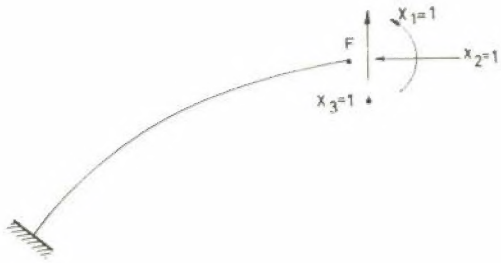
Então as incógnitas hiperstáticas X_1, X_2 e X_3 podem ser calculadas resolvendo um sistema do tipo:

$$\delta'_{11} X_1 + \delta'_{12} X_2 + \delta'_{13} X_3 + \delta'_{10} = 0$$
$$\delta'_{12} X_1 + \delta'_{22} X_2 + \delta'_{23} X_3 + \delta'_{20} = 0$$
$$\delta'_{12} X_1 + \delta'_{23} X_2 + \delta'_{33} X_3 + \delta'_{30} = 0$$

onde os δ' δ' representam deslocamentos relativos, do sistema base, no fecho.

Considerando apenas um semi-arco, supondo-o encastrado, determinam-se, então, as expressões dos $\delta\delta$.

Conforme se indica no esquema,



calculam-se os deslocamento para cada uma das solicitações, nos sentidos das forças X_1, X_2 e X_3, representando o símbolo δ_{ij} o deslocamento em